

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2Θ(α)**

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 81

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 41

A3.

- α.** Σωστό
- β.** Λάθος
- γ.** Σωστό
- δ.** Λάθος
- ε.** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Η εξίσωση της πλευράς AB είναι: $y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B) \Rightarrow$

$$y - 6 = \frac{6 - 2}{4 - (-3)}(x - 4) \Leftrightarrow y - 6 = \frac{4}{7}(x - 4) \Leftrightarrow 7y - 42 = 4x - 16 \Leftrightarrow 4x - 7y + 26 = 0.$$

B2. Θα βρούμε το μέσο K του AG που είναι: $(x_K, y_K) = \left(\frac{x_A + x_G}{2}, \frac{y_A + y_G}{2} \right) \Rightarrow$

$$(x_K, y_K) = \left(\frac{-3 + 8}{2}, \frac{2 + (-1)}{2} \right) \Leftrightarrow (x_K, y_K) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow K \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

το K θα είναι και μέσο του ΒΔ οπότε: $(x_K, y_K) = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right)$. Άρα

παίρνουμε τις σχέσεις

$$x_K = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{4 + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 4 + x_\Delta = 5 \Leftrightarrow x_\Delta = 1 \text{ και}$$

$$y_K = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6 + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 6 + y_\Delta = 1 \Leftrightarrow y_\Delta = -5$$

Άρα $\Delta(1, -5)$.

B3. Μ μέσο της ΒΓ άρα $(x_M, y_M) = \left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_\Gamma}{2} \right) = \left(\frac{4 + 8}{2}, \frac{6 + (-1)}{2} \right) = \left(6, \frac{5}{2} \right)$

Δηλαδή $M\left(6, \frac{5}{2}\right)$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από την σχέση

$$\left(\overset{\Delta}{A}MB \right) = \frac{1}{2} \left| \det \left(\vec{AM}, \vec{AB} \right) \right| \quad (1)$$

$$\vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = \left(6 - (-3), \frac{5}{2} - 2 \right) = \left(9, \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4 - (-3), 6 - 2) = (7, 4)$$

$$\det \left(\vec{AM}, \vec{AB} \right) = \begin{vmatrix} 9 & \frac{1}{2} \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 - 7 \cdot \frac{1}{2} = 36 - \frac{7}{2} = \frac{65}{2}. \text{ Άρα από την (1)}$$

$$\text{έχουμε } \left(\overset{\Delta}{A}MB \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{2} = \frac{65}{4}$$

B4. Θα βρούμε την κλίση της ευθείας AM που είναι: $\lambda_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{-3 - 6} \Leftrightarrow$

$$\lambda_{AM} = \frac{-\frac{1}{2}}{-9} = \frac{1}{18}. \text{ Επειδή η ευθεία που ζητάει είναι κάθετη στην AM θα ισχύει:}$$

$$\lambda_{AM} \cdot \lambda_\varepsilon = -1, \text{ όπου } (\varepsilon) \text{ η ευθεία που ζητάει. Άρα } \frac{1}{18} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -18.$$

$$\text{Η ευθεία που ζητάει θα είναι: } y - y_\Delta = \lambda_\varepsilon (x - x_\Delta) \Rightarrow y - (-5) = -18(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y + 5 = -18x + 18 \Leftrightarrow 18x + y = 13$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι: $y^2 + x^2 - 2xy + y - x - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + (1 - 2x)y + x^2 - x - 2 = 0$

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου:

$$\Delta = (1 - 2x)^2 - 4(x^2 - x - 2) = 1 - 4x + 4x^2 - 4x^2 + 4x + 8 = 9$$

Άρα οι λύσεις του τριωνύμου δίνονται από τις σχέσεις:

$$y = \frac{2x - 1 + \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 1 + 3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x + 2}{2} \Leftrightarrow y = x + 1 (1) \text{ και}$$

$$y = \frac{2x - 1 - \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 1 - 3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{2x - 4}{2} \Leftrightarrow y = x - 2 (2)$$

Οι (1) και (2) παριστάνουν δύο ευθείες τις $(\varepsilon_1): y = x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = x - 2$ που είναι μεταξύ τους παράλληλες καθώς έχουν ίσες κλίσεις.

Γ2. Έστω $M(x, y)$ σημείο της μεσοπαράλληλου των (ε_1) και (ε_2) .

Τότε ισχύει $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|x - y - 2|}{\sqrt{1+1}} \Leftrightarrow |x - y + 1| = |x - y - 2| \Leftrightarrow x - y + 1 = x - y - 2$$

ή $x - y + 1 = -(x - y - 2)$ οπότε έχουμε ότι η πρώτη σχέση είναι αδύνατη ενώ από τη δεύτερη σχέση προκύπτει η ζητούμενη ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): 2x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon): y = x - \frac{1}{2}$

Γ3. Παίρνουμε ένα σημείο K της ευθείας (ε_1)

Για $x=0$ έχουμε $y=1$. Άρα $K(0, 1)$.

Η απόσταση των (ε_1) και (ε_2) είναι:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(K, \varepsilon_2) = \frac{|0 - 1 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Γ4. Έστω μία ευθεία (η) παράλληλη στην ευθεία (ε_1) . Αυτή θα είναι της μορφής $(\eta): y = x + \alpha$

Η ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία:

- Για $x = 0 \Rightarrow y = \alpha$. Άρα $A(0, \alpha)$
- Για $y = 0 \Rightarrow x = -\alpha$. Άρα $B(-\alpha, 0)$

Έχουμε ότι το εμβαδό του τριγώνου OAB είναι:

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot |-\alpha| \Leftrightarrow \alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \pm 4$$

Επομένως $(\eta_1) : y = x + 4$ και $(\eta_2) : y = x - 4$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $4|\vec{\alpha}|^2 - 8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = 0$, επειδή $|\vec{\alpha}| = 1$ έχουμε ότι $-8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = -4$ (1)

$$|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 3 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = 3^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = 9 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 9$$
, επειδή $|\vec{\alpha}| = 1$ έχουμε ότι $-4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 8$ (2)

Λύνοντας σύστημα τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} -8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = -4 \\ -4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 8 \end{array} \right\} \cdot \begin{array}{l} (-1) \\ 2 \end{array} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 8\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 4 \\ -8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 8|\vec{\beta}|^2 = 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 5|\vec{\beta}|^2 = 20 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 4 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \pm 2$$

Επειδή το μέτρο είναι πάντα θετικός αριθμός το $|\vec{\beta}| = 2$

Από (1) έχουμε: $-8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = -4 \Leftrightarrow -8\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3 \cdot 2^2 = -4 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta} = 2$

Δ2. Για $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2$, οι εξισώσεις των ευθειών γίνονται:

$$(\varepsilon_1) : (\lambda + 1)x + (\lambda - 4)y + \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0 \text{ και } (\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$$

Η εξίσωση (ε_1) δεν παριστάνει ευθεία όταν ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 1 = 0 \\ \text{και} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \text{και} \end{array} \right\} \text{άτοπο γιατί η παράμετρος } \lambda \text{ δεν μπορεί να λαμβάνει}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda - 4 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 4 \end{array} \right\}$$

ταυτόχρονα δύο διαφορετικές τιμές. Άρα η εξίσωση (ε_1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ομοίως η εξίσωση (ε_2) δεν παριστάνει ευθεία όταν ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 2 = 0 \\ \text{και} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \text{και} \end{array} \right\} \text{άτοπο γιατί η παράμετρος } \lambda \text{ δεν μπορεί να λαμβάνει}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3\lambda = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \end{array} \right\}$$

ταυτόχρονα δύο διαφορετικές τιμές. Άρα η εξίσωση (ε_2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{u} // (\varepsilon_1) : \vec{u} = (\lambda - 4, -\lambda - 1)$ και έστω ένα διάνυσμα $\vec{v} // (\varepsilon_2) : \vec{v} = (3\lambda, -\lambda - 2)$. Τότε για να είναι $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$ θα πρέπει $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4, -\lambda - 1) \cdot (3\lambda, -\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda(\lambda - 4) + (-\lambda - 1)(-\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$ με ρίζες $\lambda = 2$ ή $\lambda = \frac{1}{4}$.

Δ3. $(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$

Για $\lambda = 1$ η (ε_2) γίνεται: $3x + 3y - 3 = 0$

Για $\lambda = 2$ η (ε_2) γίνεται: $2x + 3y - 1 = 0$, οπότε λύνουμε σύστημα να βρούμε το σημείο Α που τέμνονται οι δύο ευθείες αυτές.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 3y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -2x - 3y = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 2 \\ -2x - 3y = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} -y = 1$$

Άρα $y = -1$, και από την $x + y = 1$ βγάζουμε $x + (-1) = 1 \Leftrightarrow x = 2$, Α(2,-1)

Θα δείξουμε ότι το σημείο Α(2,-1) ανήκει για κάθε τιμή του λ στην ευθεία

$(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$, βάζοντας όπου $x = 2$ και $y = -1$.

$(\lambda + 2) \cdot 2 + 3\lambda \cdot (-1) + \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 4 - 3\lambda + \lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει.

Δ4. Ο κύκλος θα είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$ (1).

Η $(\varepsilon_2) : (\lambda + 2)x + 3\lambda y + \lambda - 4 = 0$ για $\lambda = 1$ γίνεται $3x + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y = 1$ (ε)

$$d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho$$

$$\text{Από την (1) έχουμε: } x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$