ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Ιανουαρίου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ.60.

Α2.

α) Λ,

β) Σ,

γ) Λ,

δ) Λ,

ε) Σ

Α3. $\eta\mu\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\eta\mu\frac{3\pi}{2}=-1$

$\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = (-5,7]$

$f(-1) = -4$

$f(3) = 0$

$f(7) = 0$

Β2. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα (-5,-1] και [5,7], γνησίως αύξουσα στο [-1,5] και παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -1$ και μέγιστο για $x = 5$.

Β3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 7$

Β4. Επειδή $f(x) \le 2$ τότε η εξίσωση $f(x) = 5$ είναι αδύνατη, άρα δεν υπάρχουν κοινά σημεία.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $ημ(π - ω) = ημω$

$συν(\frac{π}{2} - ω) = ημω$

$συν(π - ω) = -συνω$

$συν(-ω) = συνω$

Άρα: $A = ημ^2ω + συν^2ω = 1$.

Επίσης $ημ(π - ω) = ημω$

$συν(π - ω) = -συνω$

$εφ(\frac{11π}{2} - ω) = εφ(4π + \frac{3π}{2} - ω) = εφ(\frac{3π}{2} - ω) = σφω$

$συν(19π - ω) = συν(18π + π - ω) = συν(π - ω) = -συνω$

$συν(\frac{23π}{2} + ω) = συν(10π + \frac{3π}{2} + ω) = ημω$

$\sigma\varphi(13\pi+\omega)=\sigma\varphi(12\pi+\pi+\omega)=\sigma\varphi(\pi+\omega)=\sigma\varphi\omega$

Άρα: $B=\dfrac{\eta\mu\omega(-\sigma\upsilon\nu\omega)\sigma\varphi\omega}{-\sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\omega\sigma\varphi\omega}=1.$

Γ2. Αφού $x\in R$ και $-x\in R$, άρα $f(-x)=-x^3-x=-f(x)$ τότε η f περιττή.

Γ3. $f(0)=0$ άρα η εξίσωση

$f(0)=2\eta\mu^2x-1\Leftrightarrow$

$0=2\eta\mu^2x-1\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x=\dfrac{1}{2}$ οπότε

$\eta\mu x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$ ή $\eta\mu x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$

$\eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow$ $\eta\mu x=\eta\mu(-\dfrac{\pi}{4})\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right\}\kappa\in Z \qquad \left.\begin{array}{l} x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4}\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi+\pi+\dfrac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{4}\end{array}\right\}\kappa\in Z$$

Γ4. $(x^3+x)(x^2-2x+1)\le 0\Leftrightarrow$

$x(x^2+1)(x-1)^2\le 0$

Όμως $x^2+1>0$ και

$(x-1)^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα αρκεί $x\le 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(1-x)^2+x(1-x)=3 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1-2x+x-3=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1-x \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=-1 \\ y=1-x \end{cases}$

- Αν $x=2 \Rightarrow y=-1$
- Αν $x=-1 \Rightarrow y=2$
-

Δ2. Αφού κ>0, η λύση θα είναι (2,-1) οπότε $f(x)=(\sigma\upsilon\nu\alpha-3)\cdot x+4\eta\mu^2 x+3$
Επειδή συνα-3<0 για κάθε $\alpha\in R$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in R$.

Δ3.

Ισχύει
$f(2)=-1 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu\alpha-3)2+4\eta\mu^2\alpha+3=-1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\alpha-6+4(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)+4=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\alpha-6+4-4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+4=0 \Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\sigma\upsilon\nu\alpha+2=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha-1=0$

Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha=\omega, (-1\le\omega\le 1)$

$2\omega^2-\omega-1=0$

$\Delta=1-4\cdot 2\cdot(-1)=9$

$\omega_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}=$

$\omega_1=1$ ή $\omega_2=-\frac{1}{2}$

Οπότε:

$\sigma\upsilon\nu\alpha=1$

$\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu 0$

$\alpha=2\kappa\pi, \kappa\in Z$

$\alpha\in[0,\pi] \Leftrightarrow 0\le\alpha\le\pi$

$0\le 2\kappa\pi\le\pi \Leftrightarrow 0\le\kappa\le\frac{1}{2}$

$\kappa=0$ οπότε $\alpha=0$

ή

$$\sigmaυνα = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigmaυνα = \sigmaυν(\pi - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow$$

$$\sigmaυνα = \sigmaυν\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in Z$$

$$\alpha \in [o, \pi] \Leftrightarrow 0 \le \alpha \le \pi$$

$$0 \le 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \le \pi$$

$$-\frac{2\pi}{3} \le 2\kappa\pi \le \pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{2\pi}{3} \le 2\kappa\pi \le \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \le \kappa \le \frac{1}{6}$$

$$\kappa = 0$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$0 \le 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \le \pi$$

$$\frac{2\pi}{3} \le 2\kappa\pi \le \pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} \le 2\kappa\pi \le \frac{5\pi}{3}$$

$$\frac{1}{3} \le \kappa \le \frac{5}{6}$$

αδύνατη

Δ4. Επειδή $-1 \le \sigmaυνα \le 1 \Leftrightarrow -4 \le \sigmaυνα - 3 \le -2$, άρα $\sigmaυνα - 3 < 0 \Rightarrow f \downarrow$ στο R.

$$(f(\frac{1}{2}) - f(0))x < f(0) - f(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow (f(\frac{1}{2}) - f(0))x + f(\frac{1}{2}) - f(0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(\frac{1}{2}) - f(0)(x+1) < 0$$

Επειδή: $0 < \frac{1}{2} \xrightarrow{f\downarrow} f(0) > f(\frac{1}{2})$

Τότε $f(\frac{1}{2}) - f(0) < 0$ άρα $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.