

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2Θ(α)**

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 43

A2. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$

και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

A3. (α) ΣΩΣΤΟ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΛΑΘΟΣ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B1. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ είναι αντίστοιχα

$$|\vec{u}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + \kappa^2} \Leftrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{3 + \kappa^2}$$

και

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{12} \Leftrightarrow |\vec{u}| = 2\sqrt{3}$$

Εφόσον έχουν ίσα μέτρα θα ισχύει $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ επομένως

$$\sqrt{3 + \kappa^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 + \kappa^2 = 12 \Leftrightarrow \kappa^2 = 9 \Leftrightarrow \kappa = 3 \quad \kappa > 0$$

B2. Για $\kappa = 3$ έχουμε $\vec{u} = (\sqrt{3}, 3)$ ενώ $\vec{v} = (3, -\sqrt{3})$

Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{3}, 3) \cdot (3, -\sqrt{3}) = 3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = 0$$

Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα.

B3. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$ μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους

A-τρόπος

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \stackrel{\substack{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ |\vec{u}| = |\vec{v}|}}{=} 2|\vec{v}|^2 = 2(\sqrt{12})^2 = 24$$

$$\text{Άρα } |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

B-τρόπος

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$

$$\vec{u} + \vec{v} = (\sqrt{3}, 3) + (3, -\sqrt{3}) = (\sqrt{3} + 3, 3 - \sqrt{3})$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3 + 6\sqrt{3} + 3 + 9 - 6\sqrt{3} + 3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{B4. } \cos(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}) = \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u} + \vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{\vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u} + \vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}|^2 + \vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u} + \vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{12}{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως η γωνία των διανυσμάτων είναι 45° ή $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

Επομένως η εξίσωση της ευθείας AB είναι:

$$\varepsilon_{AB} : y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

Γ2.

(i) Οι συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς AG του τριγώνου ABΓ είναι

$$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ και } y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Επομένως M(3,2).

(ii) Η μεσοκάθετος ευθεία (ε) της πλευράς AG διέρχεται από το μέσο M και τέμνει την AG κάθετα επομένως $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AG} = -1$

$$\lambda_{AG} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AG} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

Άρα η (ε) διέρχεται από το M(3,2) και έχει κλίση $\lambda_\varepsilon = -2$ επομένως έχει εξίσωση $y - 2 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y - 2 = -2x + 6 \Leftrightarrow y = -2x + 8$

Γ3. Έστω $\Delta(x, y)$ εφόσον ABΓΔ παραλληλόγραμμο θα ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 3-1) = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta, y_\Gamma - y_\Delta) = (5-x, 3-y)$$

Άρα

$$\begin{cases} 5-x=1 \\ 3-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \text{ οπότε } \Delta(4,1)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

(α) Η $(\varepsilon) y = |\vec{\alpha}|x + |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 2)$ επομένως

$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B\left(-\frac{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}, 0\right)$ ή $B\left(-\frac{2}{|\vec{\alpha}|}, 0\right)$ το οποίο

προκύπτει θέτοντας $y = 0$ στην εξίσωση της (ε) .

Εφόσον το τρίγωνο είναι ισοσκελές ισχύει:

$$(OA) = (OB) \Leftrightarrow |y_A| = |x_B| \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{|\vec{\alpha}|} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 1$$

Β-τρόπος

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι θετικός επομένως η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι οξεία και επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα είναι η γωνία 45° επομένως $\lambda_\varepsilon = \tan 45^\circ \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 1$

(β) Εφόσον $\vec{\beta} = (1, |\vec{\beta}| - 1)$ τότε

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{1^2 + (|\vec{\beta}| - 1)^2} \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \sqrt{1 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| + 1} \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 1$$

Δ2. Από τη σχέση $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2$ έχουμε διαδοχικά:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 2^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4 \Leftrightarrow 1 + 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \Leftrightarrow \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$$

Άρα $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0^\circ$ δηλαδή τα διανύσματα είναι ομόρροπα και επειδή έχουν ίσα μέτρα θα είναι ίσα.

Δ3. Από τις εξισώσεις των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ έχουμε:

Α τρόπος

$$\varepsilon_1 : y = 2x - \lambda + 2 \quad (1) \quad \varepsilon_2 : y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει :

$$\lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - 2x = \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow (\lambda - 2)x = \lambda(\lambda - 2)$$

Επειδή $\lambda \neq 2$ από την τελευταία εξίσωση προκύπτει $x = \lambda$ οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε : $y = 2\lambda - \lambda + 2 \Leftrightarrow y = \lambda + 2$

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda + 2)$

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = x + 2$ που προφανώς το σημείο M ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$.

Β τρόπος

$$\varepsilon_1 : y = 2x - \lambda + 2 \Leftrightarrow 2x - y = \lambda - 2$$

$$\varepsilon_2 : y = \lambda x - \lambda^2 + \lambda + 2 \Leftrightarrow \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda - 2 \\ \lambda x - y = \lambda^2 - \lambda - 2 \end{cases} \text{ με τη μέθοδο των οριζουσών}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + \lambda = \lambda - 2 \neq 0 \text{ (από υπόθεση)}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 2 + \lambda^2 - \lambda - 2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & \lambda - 2 \\ \lambda & \lambda^2 - \lambda - 2 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Εφόσον $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, δηλαδή οι ευθείες τέμνονται.

$$\text{Άρα } x = \frac{D_x}{D} \Leftrightarrow x = \lambda \text{ και } y = \frac{D_y}{D} \Leftrightarrow y = \lambda + 2$$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

Επομένως το κοινό τους σημείο είναι $M(\lambda, \lambda + 2)$

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = x + 2$ που προφανώς το σημείο M ανήκει σε αυτήν για κάθε $\lambda \neq 2$