



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(ε)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ε είναι $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Μονάδες 15

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι αριθμός.
- β)** Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο.
- γ)** Στην παραβολή $y^2 = 2px$ τα p και x (με $x \neq 0$), είναι ομόσημα.
- δ)** Μία ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει πάντοτε συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- ε)** Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-1, 1)$, $B(4, 1)$ και $\Gamma(1, 5)$.

B1. Αν M είναι το μέσον της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία B και M είναι η $x + 2y = 6$.

Μονάδες 8

B2. Δίνεται η εξίσωση της ευθείας ζ : $4x + 3y = -1$, η οποία διέρχεται το σημείο Α και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ.

Να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο τομής Δ των ευθειών ε και ζ είναι το Δ (-4,5)

Μονάδες 3

ii. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε την παράμετρο p και την εστία Ε της παραβολής C με εξίσωση $x^2 = 2py$, της οποίας η διευθετούσα είναι η οριζόντια ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|x + \vec{\alpha}\vec{\beta}y - 8 = 0$ $x, y \in \mathbb{R}$ (1) όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 4$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που προκύπτει από την (1) αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίση με 60° .

Μονάδες 7

Γ3. Έστω C ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία ζ που έχει εξίσωση $x + y - 2 = 0$, στο σημείο N .

Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου N .

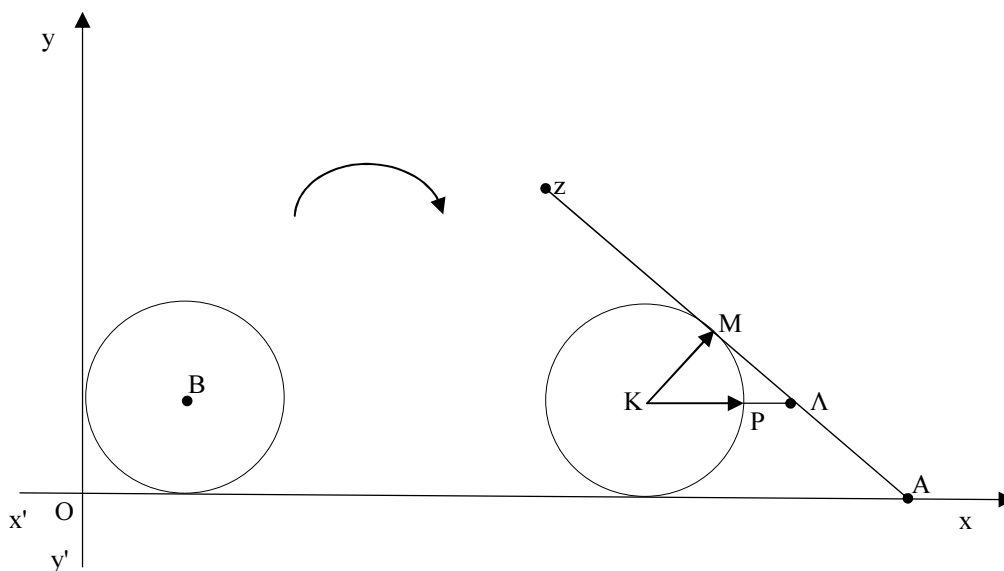
Μονάδες 7

ii. Την εξίσωση του κύκλου C .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε ότι ο ημιάξονας Oy είναι ένας κατακόρυφος τοίχος και ο ημιάξονας Ox είναι το έδαφος επί του οποίου μπορεί να κυλιέται ένα σύρμα σχήματος κύκλου με ακτίνα $\rho = 1$. Η αρχική θέση του κυκλικού σύρματος είναι τέτοια ώστε να εφάπτεται ταυτοχρόνως στους ημιάξονες Ox και Oy και τότε έχει κέντρο το σημείο B . Κάποια στιγμή αρχίζει να κυλιέται προς τα δεξιά μέχρι τη στιγμή που προσκρούει στο κεκλιμένο επίπεδο Az οπότε και ακινητοποιείται όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η τετμημένη του σημείου A είναι $9 + \sqrt{2}$. Τα σημεία K και M αφορούν στην τελική θέση του κυκλικού σύρματος και είναι αντιστοίχως το κέντρο του και το σημείο επαφής του με το επίπεδο Az . Αν P σημείο αυτού του κύκλου τέτοιο ώστε $\overrightarrow{KP} \parallel Ox$ για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{MKP} = \widehat{K\Lambda M} = \widehat{OAZ} = 45^\circ$ όπου Λ το σημείο τομής της προέκτασης του KP με το επίπεδο Az .

Μονάδες 4

β) Η εξίσωση της ευθείας ε που ορίζει το κεκλιμένο επίπεδο Az είναι $x + y - 9 - \sqrt{2} = 0$.

Μονάδες 4

γ) Οι συντεταγμένες του κέντρου K είναι $K(8, 1)$.

Μονάδες 5

Δ2. Θεωρούμε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει την οικογένεια των κύκλων που περιλαμβάνει όλες τις θέσεις από τις οποίες διέρχεται το κυκλικό σύρμα κατά την διάρκεια της συνολικής διαδρομής του.

Να αποδείξετε ότι:

α) $B = -2$

Μονάδες 3

β) $A = -2\sqrt{\Gamma}$

Μονάδες 4

γ) $1 \leq \Gamma \leq 64$

Μονάδες 5

- Να θεωρήσετε τη διάμετρο (πάχος) του σύρματος αμελητέα
- Οι αριθμοί που αφορούν σε μήκη είναι σε cm