

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελίδα 43.

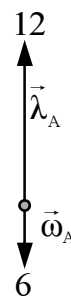
- A2.** α) Σωστό.
β) Σωστό.
γ) Λάθος.
δ) Λάθος.
ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Τα μήκη των δεικτών των ρολογιών είναι τα μέτρα των αντίστοιχων διανυσμάτων. Έτσι έχουμε $|\vec{\lambda}_A| = 4$, $|\vec{\omega}_A| = 3$ και $|\vec{\lambda}_A| = 8$.

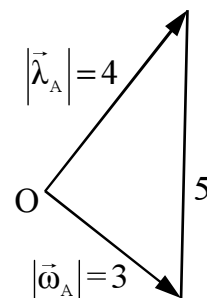
B1. i) Στις 06:00 π.μ. τα διανύσματα $\vec{\lambda}_A$, $\vec{\omega}_A$ είναι προφανώς αντίρροπα. Επομένως η μεταξύ τους γωνία είναι 180° . Άρα:

$$\vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A = |\vec{\lambda}_A| \cdot |\vec{\omega}_A| \cos 180^\circ = 4 \cdot 3 \cdot (-1) = -12$$



ii) α' τρόπος

Σε οποιαδήποτε από αυτές τις χρονικές στιγμές το τρίγωνο που έχει κορυφές το κέντρο του ρολογιού και τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{\lambda}_A$, $\vec{\omega}_A$, έχει μήκη πλευρών 4, 3, 5. Παρατηρούμε πως αληθεύει η ισότητα $5^2 = 3^2 + 4^2$. Επομένως, σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές του δείκτες του ρολογιού. Έτσι η μεταξύ τους γωνία είναι 90° .



$$\text{Άρα } \vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A = |\vec{\lambda}_A| \cdot |\vec{\omega}_A| \sin 90^\circ = 4 \cdot 3 \cdot 0 = 0$$

β' τρόπος

Με χρήση του νόμου των συνημιτόνων. Έχουμε:

$$5^2 = |\vec{\lambda}_A|^2 + |\vec{\omega}_A|^2 - 2|\vec{\lambda}_A| \cdot |\vec{\omega}_A| \cdot \sin(\widehat{\vec{\lambda}_A, \vec{\omega}_A}) \quad \text{ή}$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2 - 2\vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A \quad \text{ή}$$

$$-2\vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A = 0 \quad \text{ή}$$

$$\vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A = 0$$

- B2.** Από το δεδομένο του προβλήματος προκύπτει ότι όταν η ώρα στην Αθήνα είναι 04:00 π.μ., στο Λονδίνο είναι 02:00 π.μ.. Το τόξο από το 12 έως το 4 είναι το $\frac{1}{3}$ του κύκλου. Επομένως $(\widehat{\vec{\lambda}_A, \vec{\omega}_A}) = 360^\circ : 3 = 120^\circ$.

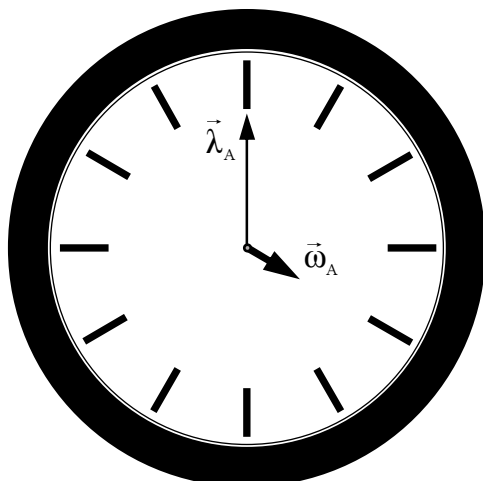
Το τόξο από το 12 έως το 2 είναι το $\frac{1}{6}$ του κύκλου. Επομένως $(\widehat{\vec{\lambda}_A, \vec{\omega}_A}) = 360^\circ : 6 = 60^\circ$

Από την υπόθεση έχουμε $\frac{\vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A}{|\vec{\lambda}_A| \cdot |\vec{\omega}_A|} = -4$.

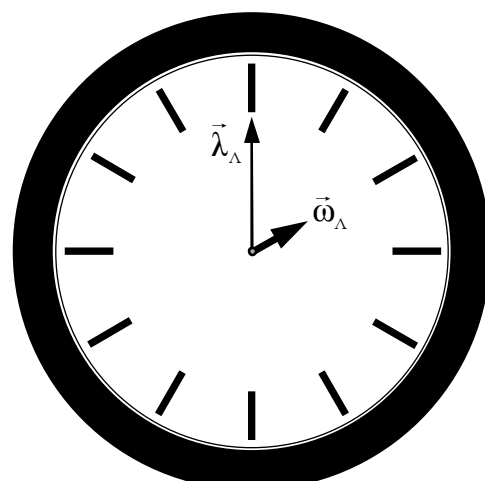
Άρα

$$\frac{|\vec{\lambda}_A| \cdot |\vec{\omega}_A| \sin 60^\circ}{|\vec{\lambda}_A| \cdot |\vec{\omega}_A| \sin 120^\circ} = -4 \quad \text{ή} \quad \frac{8 \cdot |\vec{\omega}_A| \cdot \frac{1}{2}}{4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -4 \quad \text{ή} \quad -\frac{4 \cdot |\vec{\omega}_A|}{6} = -4 \quad \text{ή} \quad |\vec{\omega}_A| = 6$$

Συνεπώς το μήκος του ωροδείκτη του ρολογιού που βρίσκεται στο Λονδίνο είναι 6cm.



ΑΘΗΝΑ



ΛΟΝΔΙΝΟ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Α οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Επομένως:

$$2\kappa = 2 \frac{\kappa^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2\kappa = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa - 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι $A\left(\frac{1^2 + 1}{2}, 2 \cdot 1\right)$ δηλαδή $A(1, 2)$.

ii) Ισχύει ότι:

$$|\overline{OB}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(\mu - 0)^2 + \left(\frac{1}{2}\mu - 0\right)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}\mu^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}\mu^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4}\mu^2 = 5 \Leftrightarrow \mu^2 = 4 \stackrel{\mu > 0}{\Leftrightarrow} \mu = 2$$

Άρα το Β έχει συντεταγμένες $B\left(2, \frac{1}{2} \cdot 2\right)$ δηλαδή $B(2, 1)$.

Γ2. i) Έχουμε:

$$\text{συν}\hat{\omega} = \text{συν}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}^2} = \frac{4}{5}$$

ii) α' τρόπος

$$\text{Επειδή } \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \text{ έχουμε: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Rightarrow 1x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \quad (1)$$

β' τρόπος

$$\text{Επειδή } \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \text{ έχουμε: } \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\gamma}} = -1 \Rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow \frac{2y}{x} = -1 \Rightarrow x = -2y$$

α' τρόπος

Έχουμε :

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\delta} = 2y + x \stackrel{(1)}{=} 2y - 2y = 0$$

Επομένως $\vec{\beta} \perp \vec{\delta}$

β' τρόπος

Έχουμε :

$$\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{2} \text{ και } \lambda_{\vec{\delta}} = \frac{x}{y} \stackrel{(1)}{=} \frac{-2y}{y} = -2$$

Άρα: $\lambda_{\vec{\beta}} \cdot \lambda_{\vec{\delta}} = \frac{1}{2}(-2) = -1$ άρα $\vec{\beta} \perp \vec{\delta}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

iii) Από $xy \neq 0$ είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin \hat{\varphi} &= \sin(\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\gamma}| |\vec{\delta}|} = \frac{(x, y)(y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{xy + yx}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^2} \\ &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{2(-2y)y}{(-2y)^2 + y^2} = \frac{-4y^2}{4y^2 + y^2} = \frac{-4y^2}{5y^2} = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Οι γωνίες ω και φ ως γωνίες διανυσμάτων ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi]$.
Ιδιαίτέρως έχουμε

$$\begin{aligned} \sin \hat{\omega} = \frac{4}{5} > 0 \quad \text{άρα } 0 < \hat{\omega} < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \sin \hat{\varphi} = -\frac{4}{5} < 0 \quad \text{άρα } \frac{\pi}{2} < \hat{\varphi} < \pi \quad \text{και αφού} \\ \sin \hat{\omega} = -\sin \hat{\varphi} \quad \text{έπεται ότι} \quad \hat{\omega} + \hat{\varphi} = \pi. \end{aligned}$$

Γ3. i) α' τρόπος:

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα. Τότε από τη συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων έχουμε

$$\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \quad \text{ή} \quad x = -y$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $xy \neq 0$.

Για $x=y$ από την (1) έχουμε $1 = -2$ Ψευδής, ενώ για $x = -y$ έχουμε $1 = 2$ Ψευδής.

Έτσι σε κάθε περίπτωση η υπόθεσή μας οδηγεί σε άτοπο, επομένως τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ δεν είναι παράλληλα.

β' τρόπος: Από την υπόθεση έχουμε ότι $xy \neq 0$. Επομένως τα διανύσματα

$$\vec{\gamma} \quad \text{και} \quad \vec{\delta} \quad \text{έχουν συντελεστές διεύθυνσης} \quad \lambda_{\vec{\gamma}} = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \lambda_{\vec{\delta}} = \frac{x}{y} \quad \text{αντιστοίχως.}$$

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα. Τότε

$$\vec{\gamma} // \vec{\delta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\gamma}} = \lambda_{\vec{\delta}} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \quad \text{ή} \quad x = -y \quad \text{και η απόδειξη}$$

ολοκληρώνεται όπως και στον α' τρόπο.

γ' τρόπος: Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι παράλληλα. Τότε

$$\vec{\gamma} // \vec{\delta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \kappa \vec{\delta}, \quad \kappa \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = \kappa(y, x) \Leftrightarrow x = \kappa y \quad \text{και} \quad y = \kappa x. \quad \text{Η πρώτη εξίσωση, λόγω της δεύτερης, δίνει} \quad x = \kappa^2 x \quad \text{και αφού} \quad x \neq 0 \quad \text{είναι τελικά} \quad \kappa^2 = 1. \quad \text{Άρα} \quad \kappa = 1 \quad \text{ή} \quad \kappa = -1. \quad \text{Για} \quad \kappa = 1 \quad \text{είναι} \quad x = y, \quad \text{ενώ για} \quad \kappa = -1 \quad \text{είναι} \quad x = -y \quad \text{και η απόδειξη ολοκληρώνεται όπως και στον α' τρόπο.}$$

ii) α' τρόπος: Τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ δεν είναι συγγραμμικά, συνεπώς κατασκευάζεται παραλληλόγραμμο από αυτά.

Έστω ΚΛΜΝ το παραλληλόγραμμο αυτό, τότε:

$$\overline{KM} = \vec{\gamma} + \vec{\delta} \text{ και } \overline{NL} = \vec{\gamma} - \vec{\delta}$$

Επομένως:

$$\overline{KM} = (x, y) + (y, x) \Rightarrow \overline{KM} = (x+y, y+x)$$

$$\text{και } \overline{NL} = (x, y) - (y, x) \Rightarrow \overline{NL} = (x-y, y-x)$$

Από Γ3 i έχουμε $x \neq y$ και $x \neq -y$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \lambda_{\overline{KM}} \cdot \lambda_{\overline{NL}} &= \frac{y+x}{x+y} \cdot \frac{y-x}{x-y} \\ &= \frac{(y+x)(y-x)}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{-(x-y)}{(x-y)} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lambda_{\overline{KM}} \cdot \lambda_{\overline{NL}} = -1 \Leftrightarrow \overline{KM} \perp \overline{NL}$$

Δηλαδή στο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα, άρα αυτό είναι ρόμβος.

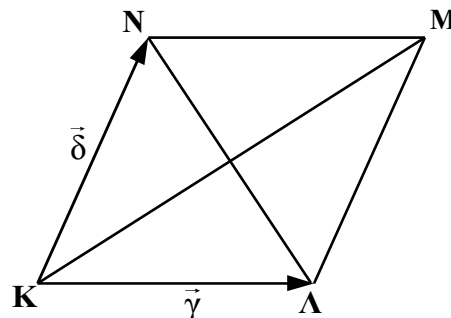
β' τρόπος

Παρατηρούμε ότι:

$$|\overline{KL}| = |\vec{\gamma}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\overline{KN}| = |\vec{\delta}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Άρα το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, συνεπώς είναι ρόμβος.



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία (ζ): $y = -\frac{3}{4}x - 2017$.

Δ1. i) Έστω (ε) $y = \lambda x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία. Έχουμε:

$$(ε) // (ζ) \Leftrightarrow \lambda_\epsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow \lambda_\epsilon = -\frac{3}{4}$$

Η ευθεία (ε) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο Α(0,3), επομένως οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε). Έχουμε:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

$$3 = -\frac{3}{4} \cdot 0 + \beta \Rightarrow \beta = 3$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -\frac{3}{4}x + 3$.

ii) Για να βρούμε το σημείο τομής B της ευθείας (ε) με τον άξονα x'x θέτουμε $y=0$. Έχουμε:

$$0 = -\frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow x = 4$$

Άρα B(4,0)

Δ2. i) α' τρόπος: Αν $\Delta(x,y)$ τότε

$$\overrightarrow{A\Delta} = (x-0, y-3) = (x, y-3) \text{ και } \overrightarrow{AB} = (4-0, 0-3) = (4, -3)$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση:

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{9}{25} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x, y-3) = \frac{9}{25}(4, -3) \Leftrightarrow$$

$$(x, y-3) = \left(\frac{36}{25}, -\frac{27}{25}\right) \Leftrightarrow x = \frac{36}{25} \text{ και } y-3 = -\frac{27}{25} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{36}{25} \text{ και } y = 3 - \frac{27}{25} \Leftrightarrow x = \frac{36}{25} \text{ και } y = \frac{75-27}{25} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{36}{25} \text{ και } y = \frac{48}{25}$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $\Delta\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$

β' τρόπος: Με σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων O(0,0) έχουμε:

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{9}{25} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} = \frac{9}{25} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{O\Delta} = \frac{9}{25} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{O\Delta} = \frac{9}{25}(4, -3) + (0, 3) \Rightarrow \overrightarrow{O\Delta} = \left(\frac{36}{25}, -\frac{27}{25} + 3\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{O\Delta} = \left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $\Delta\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$

ii) α' τρόπος: Το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο με $\hat{A}OB = 90^\circ$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της OΔ είναι:

$$\lambda_{O\Delta} = \frac{\frac{48}{25} - 0}{\frac{36}{25} - 0} = \frac{\frac{48}{25}}{\frac{36}{25}} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.Mλ2Θ(α)

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{0-3}{4-0} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Επειδή } \lambda_{OA} \cdot \lambda_{AB} = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow OA \perp AB$$

Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OA είναι το ύψος του AOB τριγώνου προς την υποτείνουσα AB .

β' τρόπος: Έχουμε $\lambda_{OA} = \frac{4}{3} = \frac{48}{36} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$ και $\lambda_{AB} = -\frac{3}{4}$. Άρα:

$$\lambda_{OA} \cdot \lambda_{AB} = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow OA \perp AB. \text{ Στο ορθογώνιο τρίγωνο } \hat{A}OB \text{ ορθή είναι}$$

η γωνία \hat{O} των αξόνων και AB η υποτείνουσα. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OA είναι κάθετο στην υποτείνουσα AB .

Δ3. Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του AG . Έχουμε ότι $\overline{OM} = (x, y)$, $\overline{OA} = (0, 3)$, $\overline{OG} = (3, 0)$ όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων.

$$\overline{OM} \cdot \overline{OA} = (x, y)(0, 3) = x \cdot 0 + y \cdot 3 = 3y$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{OG} = (x, y)(3, 0) = x \cdot 3 + y \cdot 0 = 3x$$

$$3|\overline{OM}| = 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(\overline{OM} \cdot \overline{OA})^2 + (\overline{OM} \cdot \overline{OG})^2 = (3|\overline{OM}|)^2 \Leftrightarrow$$

$$(3y)^2 + (3x)^2 = [3\sqrt{x^2 + y^2}]^2 \Leftrightarrow$$

$$9y^2 + 9x^2 = 9(x^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$9y^2 + 9x^2 = 9x^2 + 9y^2 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0 \text{ Αληθής}$$

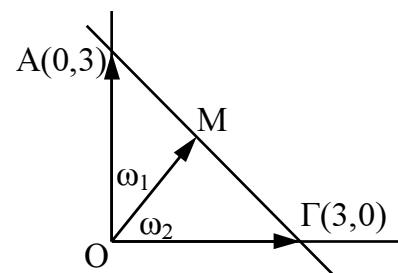
β' τρόπος: Αρχικά έχουμε: $|\overline{OA}| = |\overline{OG}| = 3$.

$$\overline{OM} \cdot \overline{OA} = |\overline{OM}| \cdot |\overline{OA}| \cos \omega_1 \quad (1)$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{OG} = |\overline{OM}| \cdot |\overline{OG}| \cos \omega_2 \quad (2)$$

Για οποιαδήποτε θέση του M στο AG έχουμε $\omega_1 + \omega_2 = \pi/2$. Επομένως $\cos \omega_2 = \sin \omega_1$. Έτσι η σχέση (2) γράφεται:

$$\overline{OM} \cdot \overline{OG} = |\overline{OM}| \cdot |\overline{OG}| \sin \omega_1 \quad (3)$$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

Από (1) και (3) έχουμε:

$$\begin{aligned}(\overline{OM} \cdot \overline{OA})^2 + (\overline{OM} \cdot \overline{OG})^2 &= |\overline{OM}|^2 \cdot |\overline{OA}|^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega_1 + |\overline{OM}|^2 \cdot |\overline{OG}|^2 \eta\mu^2\omega_1 = \\ &= 9|\overline{OM}|^2 \sigma\upsilon\nu^2\omega_1 + 9|\overline{OM}|^2 \eta\mu^2\omega_1 = 9|\overline{OM}|^2 (\sigma\upsilon\nu^2\omega_1 + \eta\mu^2\omega_1) = \\ &= 9|\overline{OM}|^2 = (3|\overline{OM}|)^2\end{aligned}$$