ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 45.

Α2. **α)** Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\vec{v}=3\vec{a}-2\vec{\beta}=3(-1,2)-2(0,-3)=(-3,6)+(0,6)=(-3,12)$.
$\gamma=(-3,12)(-1,2)+4(-1,2)(0,-3)=(3+24)+4(0-6)=27-24=3$.

Β2. $\mathrm{AB}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\lambda_{\overline{\mathrm{AB}}}\cdot\lambda_{\vec{v}}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{-1}{\lambda_{\vec{v}}}=\dfrac{-1}{\frac{12}{-3}}=\dfrac{1}{4}$

Άρα $\mathrm{AB}: y-3=\frac{1}{4}(x-3)\Leftrightarrow 4y-12=x-3\Leftrightarrow x-4y+9=0$

και $\mathrm{B\Gamma}: y=3x-2$ αφού $\gamma=\vec{v}\vec{a}+4\vec{a}\vec{\beta}=3$

Για την εύρεση της κορυφής Β λύνω το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} x-4y=-9 \\ y=3x-2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x-12x+8=-9 \\ y=3x-2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(-11x=-17\right)\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x=\dfrac{17}{11} \\ y=\dfrac{29}{11} \end{pmatrix}$$

Β3. $\begin{pmatrix} x_{\text{M}} = \lambda - 1 \\ y_{\text{M}} = 2\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_{\text{M}} + 1 \\ y_{\text{M}} = 2x_{\text{M}} + 2 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_{\text{M}} + 1 \\ 2x_{\text{M}} - y_{\text{M}} + 4 = 0 \end{pmatrix}$

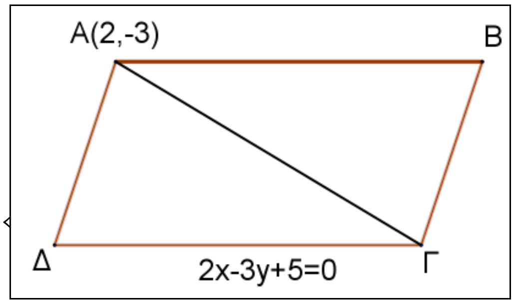
Άρα το Μ κινείται στην ευθεία 2χ-ψ+4=0

Β4. Είναι $\text{ΑΓ}: 2x - y + 4 = 0$.

$$(\text{ΒΛ}) = \text{d}\,(B,\ \text{ΑΓ}) = \frac{\left|2 \cdot \frac{17}{11} - \frac{29}{11} + 4\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{49}{11}}{\sqrt{5}} = \frac{49\sqrt{5}}{11 \cdot 5} = \frac{49\sqrt{5}}{55}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $(\varepsilon): x + y = 0$ **δεν** διέρχεται από το Α(2, –3) αφού οι συντεταγμένες του δεν την επαληθεύουν και δεν είναι παράλληλη στην ΔΓ γιατί $\lambda_{\varepsilon} = -1 \neq \lambda_{\Delta\Gamma}$. Άρα είναι η (ΒΓ).



Για το Γ λύνουμε το $(\Sigma_1)\ \begin{Bmatrix} x + y = 0 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = -x \\ 2x + 3x + 5 = 0 \end{Bmatrix}$ δηλαδή Γ (–1, 1), άρα $\text{K}\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{1-3}{2}\right)$ ή $\text{K}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

Γ2. Για την ΑΒ: $(\Delta\Gamma)//(\text{AB}) \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{\text{AB}} = \frac{2}{3}$ και διέρχεται από το Α(2,–3)

άρα $y - (-3) = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow\ 2x - 3y - 13 = 0$.

Για το σημείο Β:

$(\Sigma_2)\ \begin{Bmatrix} 2x - 3y - 13 = 0 \\ x + y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x + 3x = 13 \\ y = -x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{13}{5} \\ y = \frac{-13}{5} \end{Bmatrix}$ ΄Αρα Β $\left(\frac{13}{5}, \frac{-13}{5}\right)$

δηλ. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = (-3, 4)$ και $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

δηλ. $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -3 & 4 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{6}{5} - \frac{12}{5}\right| = \frac{9}{5}$ τ.μ.

άρα $(\text{ΑΒΓΔ}) = 2(\text{ΑΒΓ}) = \frac{18}{5}$ τ.μ.

Γ3. Η παραβολή είναι της μορφής

$C: y^2 = 2px$ και διέρχεται από το σημείο $\text{Κ}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ άρα:

$1 = 2p \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 1$ δηλαδή $\text{C}: y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} y^2$.

Γ4. Η εφαπτόμενη στο σημείο $\text{Κ}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ θα είναι:

$(\eta): -y = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x + 2y + 1 = 0$ με $\lambda_\varepsilon = -1$

Η διχοτόμος της γωνίας ΕΚΘ είναι κάθετη στην παραπάνω εφαπτόμενη

$\delta \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\delta \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = 1$ (από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής)

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η εξίσωση $(\varepsilon): \alpha x + \beta y = 0$ παριστάνει ευθεία, άρα $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\beta y = 0$ **(1)** είναι της μορφής $x^2 + y^2 + \text{Α}x + By + \Gamma = 0$

με: $\text{Α}^2 + \text{Β}^2 - 4\Gamma = 16\alpha^2 + 16\beta^2 = 16(\alpha^2 + \beta^2) > 0$ αφού $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(2α,2β) και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{16(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Δ2. $d(\text{Κ}, \varepsilon) = \frac{|2\alpha^2 + 2\beta^2|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \rho$ δηλαδή η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

Δ3. Αν $\text{Κ}(x_\kappa, y_\kappa)$ τότε: $\begin{Bmatrix} x_\kappa = 2\alpha \\ y_\kappa = 2\beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \frac{x_\kappa}{2} \\ \beta = \frac{y_\kappa}{2} \end{Bmatrix}$.

Όμως $3\alpha^2 + 4\beta^2 = 3 \Leftrightarrow 3\frac{x_\kappa^2}{4} + 4\frac{y_\kappa^2}{4} = 3 \Leftrightarrow$

$3x_\kappa^2 + 4y_\kappa^2 = 12$ ή $\frac{x_\kappa^2}{4} + \frac{y_\kappa^2}{3} = 1$

δηλαδή κινείται το Κ σε έλλειψη με $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 3$.

Άρα α = 2 και $\beta = \sqrt{3}$ οπότε θα είναι:

Μεγάλος άξονας: $(\text{ΑΑ}') = 2\alpha = 4$, μικρός άξονας: $(\text{ΒΒ}') = 2\sqrt{3}$ και

$\gamma^2 = 4–3 = 1$ δηλαδή εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{N}(x_1, y_1)$ είναι: $3x_1 \cdot x + 4y_1 \cdot y = 12$, η οποία διέρχεται από το Ζ(-2, 3) άρα:
$-6x_1 + 12y_1 = 12 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 = -2$ (1) και το $\mathrm{N}(x_1, y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης, οπότε: $3x_1^2 + 4y_1^2 = 12$ (2)
Για την εύρεση της $\mathrm{N}(x_1, y_1)$ λύνω το σύστημα των (1) και (2):

$$(\Sigma)\quad \left.\begin{aligned} x_1 - 2y_1 &= -2 \\ 3x_1^2 + 4y_1^2 &= 12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - 2 \\ 3\cdot(2y_1 - 2)^2 + 4y_1^2 &= 12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{12}\left(y_1^2 - 2y_1 + 1\right) + 4y_1^2 = \cancel{12} \Leftrightarrow 3y_1^2 - 6y_1 + 3 + y_1^2 - 3 = 0$$

$4y_1^2 - 6y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0$ ή $y_1 = \dfrac{3}{2}$ δηλαδή $\mathrm{N}\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$. Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης
είναι $3 \cdot 1 \cdot x + 4 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot y = 12 \Leftrightarrow 3x + 6y = 12 \Leftrightarrow x + 2y = 4 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$

Είναι $\mathrm{A}'(-2, 0)$, $\mathrm{N}\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ οπότε το μέσο Μ του ΝΑ′ είναι $\mathrm{M}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.
Έχω και Ζ (–2, 3), Ο(0,0)
Άρα $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ και $\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = (-2, 3)$.

Οπότε $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OZ}}\right) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{4} \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 0$

Δηλαδή $\overrightarrow{\mathrm{OM}} // \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ οπότε Ο, Μ, Ζ συνευθειακά.