

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 38.
A2. α) Λάθος (γιατί $\lambda = -\frac{A}{B}$)
β) Σωστό
γ) Λάθος ($\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ.}_{\vec{\beta}} \vec{a}$)
δ) Λάθος (γιατί δεν ορίζεται ο λ)
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. α' τρόπος

Έστω $B(x,y)$ τότε θα είναι:

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} \Leftrightarrow (-1-1, 4-2) = (x+1, y-4) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x+1 \\ 2 = y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases} \text{ δηλαδή}$$

$B(-3,6)$.

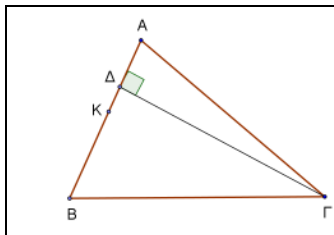
β' τρόπος

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Leftrightarrow x_B = -2 - 1 = -3$$

$$\text{και } y_K = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow y_B = 8 - 2 = 6 \text{ δηλαδή } B(-3,6).$$

B2. $\overrightarrow{AG} = (4, 3) \Leftrightarrow (x_G - 1, y_G - 2) = (4, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - 1 = 4 \\ y_G - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 5 \\ y_G = 5 \end{cases}$

Δηλαδή $\Gamma(5, 5)$ οπότε $\overrightarrow{BG} = (5 - 3, 5 - 6) = (2, -1)$.



Η προβολή του $\overrightarrow{BG}$ πάνω στο $\overrightarrow{BA}$ είναι το $\overrightarrow{BD}$ και αφού

$$\overrightarrow{BD} / \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \lambda \cdot \overrightarrow{BA} = \lambda(1 + 3, 2 - 6) = \lambda(4, -4) = (4\lambda, -4\lambda)$$

Θα είναι

$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (2, -1) \cdot (4, -4) = (4\lambda, -4\lambda) \cdot (4, -4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4 = 16\lambda + 16\lambda \Leftrightarrow 4 = 32\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

οπότε $\overrightarrow{BD} = \left(\frac{4}{8}, -\frac{4}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

B3. $\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{KG} = (-1 - 1, 4 - 2) - 2(5 + 1, 5 - 4) = (-2, 2) + (-12, -2) = (-14, 0)$

Οπότε $|\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{KG}| = \sqrt{(-14)^2 + 0^2} = \sqrt{196} = 14$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το B είναι το σημείο τομής των AB και BΔ.

Λύνω το (Σ) των εξισώσεων τους.

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 11 + 5x + 4 = 0 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

δηλαδή B(1, 6).

Γ2. Η πλευρά AG είναι κάθετη στο ύψος BΔ, οπότε

$$\lambda_{AG} \cdot \lambda_{BD} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AG} \cdot (-5) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AG} = \frac{1}{5}.$$

Άρα AG: $y - 4 = \frac{1}{5}(x - 5) \Leftrightarrow 5y - 20 = x - 5 \Leftrightarrow x - 5y + 15 = 0.$

Γ3. Το μέσο M της BG είναι $M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (3, 5).$

Ο συντελεστής της BG είναι $\lambda_{BG} = \frac{4-6}{5-1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

Αφού η μεσοκάθετη $\varepsilon \perp B\Gamma$ θα έχει $\lambda_\varepsilon=2$ και η εξίσωσή της θα είναι:

$$y-5=2(x-3) \Leftrightarrow y-5=2x-6 \Leftrightarrow 2x-y-1=0.$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΒΔ και (ε):

$$\begin{aligned} \text{ΒΔ: } y &= 11-5x \\ \varepsilon: 2x-y-1 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=11-5x \\ 2x-11+5x-1=0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=11-5x \\ 7x=12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=11-\frac{60}{7}=\frac{17}{7} \\ x=\frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

δηλαδή τέμνονται στο $Z\left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\kappa + 4}{2}$

και $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + \kappa + 4}{2} = \frac{\kappa + 9}{2}.$

Άρα $\kappa = 2x_M - 4$ και $\kappa = 2y_M - 9$ οπότε $2x_M - 4 = 2y_M - 9 \Leftrightarrow 2x_M - 2y_M + 5 = 0$
δηλαδή το Μ κινείται στην ευθεία $2x - 2y + 5 = 0$.

Δ2. Είναι $\overline{AB} = (4 - \kappa, \kappa + 4 - 5) = (4 - \kappa, \kappa - 1)$ και $\varepsilon_1 // \vec{\delta}_1 = (1, 2).$

Αν $\overline{AB} // \varepsilon_1 \Leftrightarrow \overline{AB} // \vec{\delta}_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 - \kappa & \kappa - 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8 - 2\kappa - \kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 3\kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$ οπότε $A(3, 5)$ και $B(4, 7)$.

Άρα $\varepsilon: y - 5 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y - 5 = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$

Δ3. α) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} + 3\vec{\beta})(\vec{a} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{\beta} + 3\vec{a}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 =$

$= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a}\vec{\beta} - 6|\vec{\beta}|^2 = 2 \cdot 2^2 - |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \nu \frac{2\pi}{3} - 6 \cdot 1^2 =$

$= 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 = 8 + 1 - 6 = 3$

και $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = (\vec{a} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 =$

$|\vec{a}|^2 - 4 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \nu \frac{2\pi}{3} + 4|\vec{\beta}|^2 = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot 1 = 12 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

β) Αφού $\Gamma \in (\varepsilon) : y = 2x - 1$ θα είναι $\Gamma(x_\Gamma, 2x_\Gamma - 1)$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\vec{u} \cdot \vec{v}) \overrightarrow{B\Gamma} + \left(\left| \vec{v} \right|^2 - 2 \right) \overrightarrow{AB} = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3\overrightarrow{B\Gamma} + (12 - 2)\overrightarrow{AB} = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3(x_\Gamma - 4, 2x_\Gamma - 1 - 7) + 10(4 - 3, 7 - 5) = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (3x_\Gamma - 12, 6x_\Gamma - 24) + (10, 20) = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (3x_\Gamma - 12, 6x_\Gamma - 24) = (4, \mu + 1) - (10, 20) = (-6, \mu - 19) \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_\Gamma - 12 = -6 \\ 6x_\Gamma - 24 = \mu - 19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_\Gamma = \frac{12 - 6}{3} \\ \mu = 6x_\Gamma - 24 + 19 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_\Gamma = 2 \\ \mu = 7 \end{pmatrix}. \text{ Άρα } \Gamma(2, 3) \end{aligned}$$