

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β΄ ΦΑΣΗ

E_3.BMλ2Θ(ε)

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Κυριακή 26 Απριλίου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB . Να αποδείξετε ότι ισχύει: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Μονάδες 9

A2. Να δώσετε το ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$. Πώς ορίζουμε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ όταν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$;

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\vec{a} = (x, y)$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου, τότε σε κάθε περίπτωση ο συντελεστής του, $\lambda_{\vec{a}}$, είναι ίσος με το πηλίκο $\frac{y}{x}$.

β) Έστω \vec{a}, \vec{v} δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$. Τότε ισχύει ότι: $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$.

γ) Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$.

δ) Οι διχοτόμοι των γωνιών \widehat{xOy} και $\widehat{yOx'}$ των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων, έχουν εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$ αντιστοίχως.

ε) Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β΄ ΦΑΣΗ

E_3.BMλ2Θ(ε)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ευθεία ϵ με εξίσωση: $3x + 4y = 12$.

B1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ και διέρχεται από το σημείο $A\left(2, -\frac{9}{2}\right)$.

Μονάδες 8

B2. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας η των ευθειών ϵ και ζ .

Μονάδες 9

B3. Αν η ευθεία ϵ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β και η ευθεία ζ τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\vec{\alpha} = (x, 4y)$, $\vec{\beta} = (-x, 2)$, με $x, y \in \mathbb{R}$, δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους.

Γ1. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι η παραβολή C , με εξίσωση: $x^2 = 8y$, της οποίας να βρείτε την εστία E και την διευθετούσα δ .

Μονάδες 8

Γ2. i) Να βρείτε τις εξισώσεις ϵ_1 , ϵ_2 των εφαπτομένων στην παραβολή C , στο σημείο $N\left(x_1, \frac{x_1^2}{8}\right)$, $x_1 \neq 0$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1, -1)$.

Μονάδες 6

ii) Να δείξετε ότι για την αμβλεία γωνία ω των εφαπτομένων ϵ_1 , ϵ_2 , ισχύει:

$$\sin \omega = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Μονάδες 3

Γ3. Δίνεται, επιπλέον, σημείο $B(x_0, y_0)$ της παραβολής C , με $x_0 < 0$ που απέχει από την διευθετούσα δ αυτής απόσταση ίση με 10. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 , ο οποίος έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα τα σημεία E και B .

Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β΄ ΦΑΣΗ

E_3.BMλ2Θ(ε)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0, (1)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C_λ , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου να υπολογίσετε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .

Μονάδες 6

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_λ , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B , των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες.

Μονάδες 4

ii) Αν $A(1,0)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_λ στο σημείο A .

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C , με εστίες τα σημεία A, B και εκκεντρότητα $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν M είναι ένα κοινό σημείο των C_λ, C , να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε: $(MA) + (MB) = 2(MK)$.

Μονάδες 5