ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ημερομηνία: Τετάρτη 7 Ιανουαρίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 43 σχολικού Βιβλίου.

Α2. **α)** Σ
β) Λ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις: $\begin{cases} \vec{\alpha}+\vec{\beta}=(0,5) & (1) \\ 2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(3,1) & (2) \end{cases}$ προκύπτει:

$$3\vec{\alpha}=(3,1)+(0,5)\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}=(3+0,1+5)\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}=(3,6)\Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}=\frac{1}{3}\cdot(3,6)\Leftrightarrow \vec{\alpha}=\left(\frac{1}{3}\cdot 3,\frac{1}{3}\cdot 6\right)\Leftrightarrow \boxed{\vec{\alpha}=(1,2)}$$

Η σχέση (1) για $\vec{\alpha}=(1,2)$ γίνεται:

$$(1,2)+\vec{\beta}=(0,5)\Leftrightarrow \vec{\beta}=(0,5)-(1,2)\Leftrightarrow \vec{\beta}=(0-1,5-2)\Leftrightarrow \boxed{\vec{\beta}=(-1,3)}$$

Β2.

$$συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{\vec{α}\cdot\vec{β}}{|\vec{α}|\cdot|\vec{β}|}\Leftrightarrow συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{x_{\vec{α}}\cdot x_{\vec{β}}+y_{\vec{α}}\cdot y_{\vec{β}}}{\sqrt{x^2_{\vec{α}}+y^2_{\vec{α}}}\cdot\sqrt{x^2_{\vec{β}}+y^2_{\vec{β}}}}\Leftrightarrow$$

$$συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 3}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}\Leftrightarrow συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\Leftrightarrow$$

$$συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{5}{\sqrt{50}}\Leftrightarrow συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}}\Leftrightarrow$$

$$συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{5}{\sqrt{2}\cdot 5}\Leftrightarrow συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$$συν\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{άρα}\ \left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)=\frac{π}{4}$$

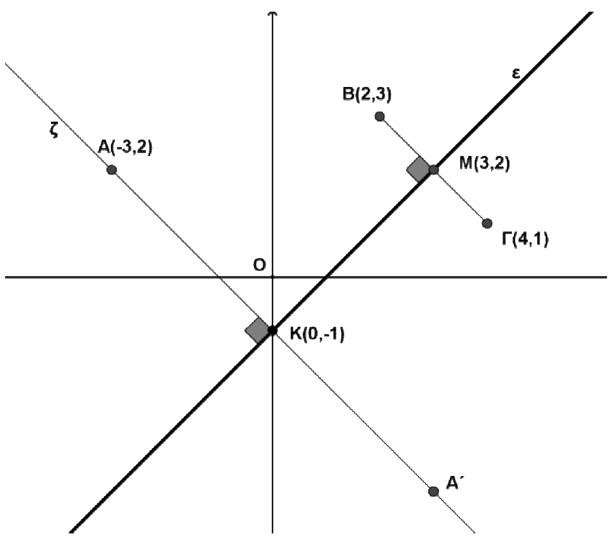
Β3. Ισχύει: $\vec{α}\cdot\vec{β}=\vec{β}\cdot προβ_{\vec{β}}\vec{α}$ (1)

όμως $προβ_{\vec{β}}\vec{α}\,/\!/\,\vec{β}\Leftrightarrow προβ_{\vec{β}}\vec{α}=λ\cdot\vec{β},\ λ\in R$. Επομένως η (1) γίνεται:

$$\vec{α}\cdot\vec{β}=\vec{β}\left(λ\cdot\vec{β}\right)\Leftrightarrow\vec{α}\cdot\vec{β}=λ\cdot\vec{β}^2\Leftrightarrow\vec{α}\cdot\vec{β}=λ\cdot|\vec{β}|^2\Leftrightarrow 5=λ\cdot 10\Leftrightarrow λ=\frac{1}{2}$$

Άρα: $προβ_{\vec{β}}\vec{α}=λ\cdot\vec{β}\Leftrightarrow προβ_{\vec{β}}\vec{α}=\frac{1}{2}\cdot(-1,3)\Leftrightarrow \boxed{προβ_{\vec{β}}\vec{α}=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$.

$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A,y_B-y_A\right)=(2+3,3-2)=(5,1)$

$\overrightarrow{B\Gamma}=\left(x_\Gamma-x_B,y_\Gamma-y_B\right)=(4-2,1-3)=(2,-2)$

Επομένως $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma})=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-10-2=-12\neq 0$, άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα, οπότε τα Α,Β και Γ όχι συνευθειακά.

Γ2. Η μεσοκάθετος (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ διέρχεται από το μέσο του Μ και το τέμνει κάθετα.
Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Μ:

$x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}\Leftrightarrow x_M=\dfrac{2+4}{2}\Leftrightarrow x_M=3$, $y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}\Leftrightarrow y_M=\dfrac{3+1}{2}\Leftrightarrow y_M=2$

Άρα, $M(3,2)$. Υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ.

$\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}\Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma}=\dfrac{1-3}{4-2}\Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma}=-1$.

Ισχύει $(\varepsilon)\perp(B\Gamma)\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=1$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι:

$(\varepsilon): y-y_M=\lambda_\varepsilon\cdot\left(x-x_M\right)\Leftrightarrow y-2=x-3\Leftrightarrow y=x-1$.

Γ3. Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία(ε).
Θα βρούμε την εξίσωση ευθείας (ζ) η οποία διέρχεται από το Α και τέμνει κάθετα την (ε).

Ισχύει: $(B\Gamma)\parallel(\zeta)\Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma}=\lambda_\zeta\Leftrightarrow \lambda_\zeta=-1$, επομένως η ευθεία (ζ) έχει εξίσωση

$(\zeta): y-y_A=\lambda_\zeta\cdot\left(x-x_A\right)\Leftrightarrow y-2=-1\cdot(x+3)\Leftrightarrow y=-x-1$

Έστω Κ το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ), του οποίου οι συντεταγμένες θα βρεθούν λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών αυτών.

Πράγματι: $\begin{cases}y=-x-1\\ y=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x-1\\ -x-1=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x-1\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=0\end{cases}$

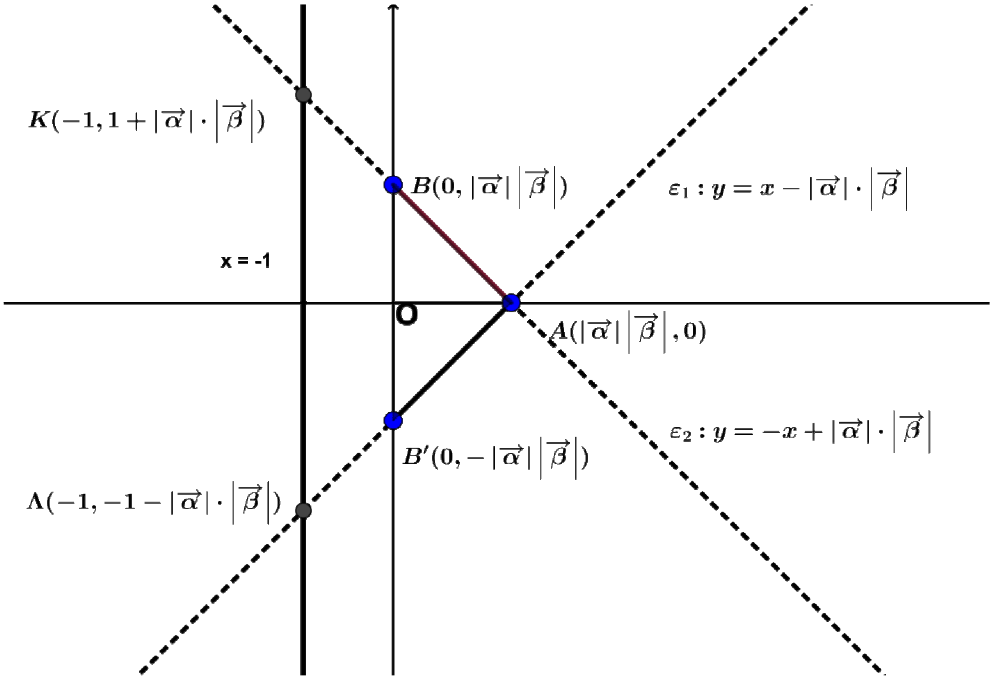
Άρα $K(0,-1)$. Λόγω συμμετρίας το Κ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄.

$x_K=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}\Leftrightarrow 0=\dfrac{-3+x_{A'}}{2}\Leftrightarrow x_{A'}=3$ και

$y_K=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}\Leftrightarrow -1=\dfrac{2+y_{A'}}{2}\Leftrightarrow y_{A'}=-4$

Άρα το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε) είναι το Α΄(3,-4)

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Αφού το τρίγωνο ΟΑΒ με $\hat{O} = 90^\circ$ είναι ισοσκελές έχουμε $(OA) = (OB)$, επομένως $\left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|$ ή $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|$.

Αν φ είναι γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ η τελευταία ισότητα γράφεται: $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\right| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\sigma\upsilon\nu\varphi|$ από την οποία προκύπτει ότι $|\sigma\upsilon\nu\varphi| = 1$, αφού τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα και επομένως είναι $|\vec{\alpha}| \neq 0$ και $|\vec{\beta}| \neq 0$. Άρα $(\sigma\upsilon\nu\varphi = -1$ ή $\sigma\upsilon\nu\varphi = 1)$ (1) οπότε φ $=180^\circ$ ή φ$=0^\circ$.

Σε κάθε περίπτωση είναι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

Δ2. Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$. Από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ αντιστοίχως.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ είναι $B\left(0, |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right)$. Αναλόγως έχουμε:

$$\lambda_{AB} = \frac{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| - 0}{0 - |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = -1.$$

$\varepsilon_2: \ y-0=-1\left(x-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right)$ ή $\varepsilon_2: \ y=-x+|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

β) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\ |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ είναι $B'\left(0,-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right)$. Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β΄ είναι

$\lambda_{AB'}=\dfrac{-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|-0}{0-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=1$ και αφού διέρχεται από το Α είναι

$\varepsilon_1: y-0=1\left(x-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\right)$ ή $\varepsilon_1: \ y=x-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Δ3. Βρίσκω τα σημεία τομής Λ και Κ αντίστοιχα των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ με την ευθεία $x=-1$.

Για $x=-1$ η (ε_1) γίνεται $y=-1-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$. Άρα: $\Lambda(-1,-1-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|)$.

Για $x=-1$ η (ε_2) γίνεται $y=1+|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$. Άρα: $K(-1,1+|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|)$.

Για χάρη ευκολίας θέτω $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=\kappa>0$.

Άρα, $\Lambda(-1,-1-\kappa), K(-1,1+\kappa)$ οπότε $\overrightarrow{O\Lambda}=(-1,-1-\kappa), \overrightarrow{OK}=(-1,1+\kappa)$.

Ισχύει:

$\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{O\Lambda}=-3 \Leftrightarrow (-1,1+\kappa)(-1,-1-\kappa)=-3 \Leftrightarrow 1+(1+\kappa)(-1-\kappa)=-3 \Leftrightarrow$

$1-1-\kappa-\kappa-\kappa^2=-3 \Leftrightarrow \kappa^2+2\kappa-3=0 \Leftrightarrow \kappa=-3$ ή $\kappa=1 \overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow} \kappa=1$

Άρα $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=1$, επομένως $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$ ή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$.