

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 4 Μαΐου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου $c: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 10

A.2. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

A.3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

- i. Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ με A, B, Γ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$.
- ii. Αν για τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
- iii. Ένα παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$.
- iv. Στην παραβολή $y^2 = 2px$ ο αριθμός p εκφράζει την απόσταση της εστίας E από τη διευθετούσα δ .
- v. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $c: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ έχουν εξίσωση $x = \pm \frac{\beta}{\alpha} y$.

Μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 4$, $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

B.1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

B.2. Να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

B.3. Για $\kappa = -4$

i. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

ii. Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} = -3\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι εξισώσεις

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + (\lambda^2 + 1)y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0 \quad (2) \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

Γ.1. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ κάθετες και να βρεθεί το σημείο τομής τους E.

Μονάδες 6

Γ.2. Να δείξετε ότι η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας αυτής διέρχονται από το ίδιο σημείο Z.

Μονάδες 7

Γ.3. Αν E(1,0) το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Z(2,-1) το σταθερό σημείο του ερωτήματος Γ.2. τότε

i. να βρείτε την εξίσωση και τη διευθετούσα της παραβολής c, η οποία έχει εστία E, κορυφή O(0,0) και άξονα συμμετρίας τον $x'x$,

Μονάδες 6

ii. να βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής c που έχει μέσο το σημείο Z.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $N(6\mu - 2, 6\lambda)$ με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\mu^2 + \lambda^2 = 1$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία N βρίσκονται στον κύκλο

$$c : (x + 2)^2 + y^2 = 36.$$

Μονάδες 7

Δ.2. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του παραπάνω κύκλου c που διέρχονται από το σημείο $\Delta(4, 8)$.

Μονάδες 8

Δ.3. Αν τα σημεία $A(4, 0)$ και E είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτόμενων με τον κύκλο c , να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $\Delta E K A$, όπου K το κέντρο του κύκλου c .

Μονάδες 5

Δ.4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων M των κύκλων, που εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου c και διέρχονται από το σημείο $\Sigma(2, 0)$.

Μονάδες 5