

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 45.

A.2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 100.

A.3. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 38.

- A.4.**
- i. Λάθος
 - ii. Σωστό
 - iii. Λάθος
 - iv. Λάθος
 - v. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B.1. Έχουμε $\overrightarrow{AB} = \left(2-1, -1+\frac{3}{2} \right) = \left(1, \frac{1}{2} \right)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \left(\kappa-2, \frac{\kappa-4}{2}+1 \right) = \left(\kappa-2, \frac{\kappa-2}{2} \right)$

Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \kappa-2 & \frac{\kappa-2}{2} \end{vmatrix} = \frac{\kappa-2}{2} - \frac{\kappa-2}{2} = 0$, οπότε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$.

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ έχουν κοινό το σημείο B, τότε έχουν τον ίδιο φορέα. Έτσι, τα A, B και Γ είναι συνευθειακά.

B.2. Είναι $\overrightarrow{AB} = \left(1, \frac{1}{2} \right)$ και $\overrightarrow{BO} = (-2, 1)$. Έχουμε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0$,

άρα $\sin(\widehat{AB, BO}) < 0$. Οπότε η γωνία $(\widehat{AB, BO})$ είναι αμβλεία.

B.3. Είναι $\overrightarrow{AB} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AG} = \left(\kappa - 1, \frac{\kappa - 4}{2} + \frac{3}{2}\right) = \left(\kappa - 1, \frac{\kappa - 1}{2}\right)$ και $\overrightarrow{BG} = \left(\kappa - 2, \frac{\kappa - 2}{2}\right)$.

Άρα $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \kappa - 1 + \frac{\kappa - 1}{4} = \frac{5\kappa - 5}{4}$ και $|\overrightarrow{BG}|^2 = (\kappa - 2)^2 + \frac{(\kappa - 2)^2}{4} = \frac{5(\kappa - 2)^2}{4}$.

Πρέπει $\frac{5\kappa - 5}{4} = 2 \cdot \frac{5(\kappa - 2)^2}{4} \Leftrightarrow \kappa - 1 = 2(\kappa - 2)^2 \Leftrightarrow$

$\kappa - 1 = 2\kappa^2 - 8\kappa + 8 \Leftrightarrow 2\kappa^2 - 9\kappa + 9 = 0$.

Έχουμε $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9$, οπότε $\kappa = 3$ ή $\kappa = \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την :

$$\lambda^2 - \lambda^2 x - \lambda y + \frac{1+x}{4} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda^2 x - 4\lambda y + 1 + x = 0 \Leftrightarrow (1 - 4\lambda^2)x - 4\lambda y + 1 + 4\lambda^2 = 0 \quad (2)$$

Έστω ότι η (2) δεν παριστάνει ευθεία. Τότε $1 - 4\lambda^2 = 0$ και $-4\lambda = 0$ δηλ.

$\lambda = \pm \frac{1}{2}$ και $\lambda = 0$ που είναι αδύνατο. Άρα η (2) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία.

Γ.2 1^{ος} τρόπος :

Στην (2) θέτουμε διαδοχικά: $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\lambda = 0$ οπότε έχουμε :

$-2y + 2 = 0$ και $x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ και $x = -1$. Στην (2) θέτουμε $x = -1$ και

$y = 1$ οπότε έχουμε : $-1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 4\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$.

Η (2) λοιπόν δεν ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (2)

2^{ος} τρόπος :

Έστω ότι όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το σημείο $M(x_0, y_0)$.

Η εξίσωση (1) γίνεται : $\lambda^2(1 - x_0) - \lambda y_0 + \frac{1 + x_0}{2} = 0 \quad (3)$.

Η εξίσωση (3) πρέπει να ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε $1 - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$, $y_0 = 0$

και $\frac{1 + x_0}{4} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$ που είναι αδύνατο.

Έτσι, δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (1).

Γ.3. Η (2) για $\lambda = 1$ γίνεται: $(\varepsilon_1): -3x - 4y + 5 = 0$ και για $\lambda = -1$ γίνεται $(\varepsilon_2): -3x + 4y + 5 = 0$.

Τα σημεία τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με τον $y'y$, δηλαδή με την ευθεία $(\varepsilon): x = 0$ είναι αντίστοιχα: $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$ και $B\left(0, -\frac{5}{4}\right)$.

Το σημείο τομής Γ των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ προκύπτει από την λύση του συστήματος: $(\Sigma) \begin{cases} -3x - 4y + 5 = 0 \\ -3x + 4y + 5 = 0 \end{cases}$.

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη έχουμε: $-6x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ και $-8y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ οπότε $\Gamma\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

Έχουμε $\overline{AB} = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$ και $\overline{AG} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{4}\right)$.

Οπότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{AG})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{4} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} = \frac{25}{12} \tau.μ..$

Γ.4. Από το $O(0,0)$ φέρνουμε ευθεία (δ) κάθετη στην (ε_1) .

Είναι $\lambda(\varepsilon_1) = -\frac{3}{4}$ άρα $\lambda(\delta) = \frac{4}{3}$.

Η εξίσωση της (δ) είναι: $y = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow 4x - 3y = 0$.

Το σημείο τομής Δ των (δ) και (ε_1) είναι το ζητούμενο σημείο, το οποίο προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(\Sigma) \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -3x - 4y = -5 \end{cases}$

Είναι $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -16 - 9 = -25$, $D_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -15$ και $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -20$

Άρα $x = \frac{-15}{-25} = \frac{3}{5}$ και $y = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}$, οπότε $\Delta\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Η (1) είναι ισοδύναμη με την $x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x + (\lambda + 2)y + \frac{\lambda^2}{2} = 0$ (2).

Είναι $A = \lambda - 2$, $B = \lambda + 2$ και $\Gamma = \frac{\lambda^2}{2}$, οπότε

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda - 2)^2 + (\lambda + 2)^2 - 4 \frac{\lambda^2}{2} = 8 > 0.$$

Έτσι, η (2) παριστάνει ίσους κύκλους με ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$.

Δ.2. Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι: $K\left(\frac{2-\lambda}{2}, \frac{-2-\lambda}{2}\right)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω $x = \frac{2-\lambda}{2}$ και $y = \frac{-2-\lambda}{2}$ και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε: $x - y = 2$.

Δηλ. τα κέντρα των κύκλων κινούνται στην ευθεία $(\varepsilon): x - y - 2 = 0$.

(Ένας άλλος τρόπος λύσης θα ήταν με απαλοιφή του λ από τις συντεταγμένες του K).

Δ.3. Επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε η (ε) είναι η μεσοπαράλληλος των $(\delta_1), (\delta_2)$ με $d(\varepsilon, \delta_1) = d(\varepsilon, \delta_2) = \sqrt{2}$.

Οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ αφού είναι παράλληλες της (ε) είναι μορφής: $(\delta): x - y + \gamma = 0$.

Έστω $B(2, 0)$ ένα σημείο της (ε) τότε :

$$d(\varepsilon, \delta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow d(B, \delta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2+\gamma|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |2+\gamma| = 2 \Leftrightarrow 2+\gamma = 2 \quad \text{ή} \quad 2+\gamma = -2$$

άρα $\gamma = 0$ ή $\gamma = -4$.

Οπότε $(\delta_1): x - y = 0$ και $(\delta_2): x - y - 4 = 0$.

Δ.4. i. Επειδή η (ε) δεν είναι κατακόρυφη και εφάπτεται της παραβολής, πρέπει το σύστημα των εξισώσεων: $x^2 = 2py$ και $x - y - 2 = 0$ να έχει μοναδική λύση. Έτσι, έχουμε: $x^2 = 2p(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2px + 4p = 0$.

Πρέπει λοιπόν η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης, να είναι ίση με μηδέν.

$$\text{Δηλαδή } 4p^2 - 16p = 0 \Leftrightarrow p = 4 \text{ γιατί } p \neq 0.$$

Έτσι $(C): x^2 = 8y$ με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ δηλαδή $E(0, 2)$ και διευθετούσα

$$(\delta): y = -2$$

ii. Έστω $A(x_1, y_1) \in (C)$ τότε $x_1^2 = 8y_1$ (3). Η εφαπτομένη της (C) στο A είναι :

$$(η) : xx_1 = 4y + 4y_1 \Leftrightarrow x \cdot x_1 - 4y - 4y_1 = 0.$$

$$\text{Επειδή } (η) \perp (ε) \text{ και } \lambda_\eta = \frac{x_1}{4}, \lambda_\varepsilon = 1, \text{ τότε } \frac{x_1}{4} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -4.$$

$$\text{Από την (3) έχουμε: } 16 = 8y_1 \Leftrightarrow y_1 = 2.$$

$$\text{Έτσι, η εξίσωση της (η) είναι: } -4x - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0.$$