

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 7 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A.1.** Βλέπε απόδειξη (1) σελ.175 σχολικού βιβλίου
- A.2.** α) Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 35 σχολικού βιβλίου.
 β) Βλέπε τον ορισμό στη σελίδα 74 σχολικού βιβλίου.
- A.3.** α) Σωστό - (βλέπε σελίδα 130 σχολικού βιβλίου).
 β) Σωστό - (βλέπε σελίδα 174 σχολικού βιβλίου).
 γ) Λάθος - (βλέπε σελίδα 75 σχολικού βιβλίου). Το σωστό είναι $\mathbb{R}_1 = \{x \mid \sin x \neq 0\}$
 δ) Λάθος - (βλέπε σελίδα 44 σχολικού βιβλίου). Το σωστό είναι ότι μετατοπίζεται προς τα αριστερά.
 ε) Σωστό - (βλέπε σελίδα 164 σχολικού βιβλίου).

ΘΕΜΑ Β

- B.1.** Αφού το $x + 1 = x - (-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, από γνωστό θεώρημα ισχύει $P(-1) = 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(-1) = 0 &\Leftrightarrow 2(-1)^3 + (\alpha + \beta)(-1)^2 + (2\alpha + 5\beta)(-1) + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(-1) + (\alpha + \beta) \cdot 1 - 2\alpha - 5\beta + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -2 + \alpha + \beta - 2\alpha - 5\beta + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\alpha - 4\beta + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \alpha + 4\beta = 1
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x - 2)$ ισούται με -9 , από γνωστό θεώρημα ισχύει: $P(2) = -9$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(2) &= -9 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 + (\alpha + \beta) \cdot 2^2 + (2\alpha + 5\beta) \cdot 2 + 3 = -9 \\
 &\Leftrightarrow 2 \cdot 8 + 4(\alpha + \beta) + 2(2\alpha + 5\beta) + 3 = -9 \\
 &\Leftrightarrow 16 + 4\alpha + 4\beta + 4\alpha + 10\beta + 3 = -9 \\
 &\Leftrightarrow 8\alpha + 14\beta = -9 - 16 - 3 \quad (\text{απλοποιούμε με το 2}) \\
 &\Leftrightarrow 4\alpha + 7\beta = -14 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα των (1),(2):

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \alpha + 4\beta = 1 \\ 4\alpha + 7\beta = -14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 4\beta \\ 4(1 - 4\beta) + 7\beta = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 4\beta \\ 4 - 16\beta + 7\beta = -14 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 4\beta \\ -9\beta = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 4 \cdot 2 \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -7 \\ \beta = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

B.2. Για $\alpha = -7$ και $\beta = 2$ το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται:

$$P(x) = 2x^3 + (-7 + 2)x^2 + [2(-7) + 5 \cdot 2]x + 3 \Leftrightarrow P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$$

α) Είναι $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

Σύμφωνα με το Θεώρημα ακεραίων ριζών οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης, είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου $a_0 = 3$, δηλαδή οι αριθμοί $\pm 1, \pm 3$

Από το ερώτημα (B₁) ισχύει $P(-1) = 0$, δηλαδή το -1 είναι ρίζα του $P(x)$, οπότε εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για $\rho = -1$ έχουμε:

2	-5	-4	3	$\rho = -1$
	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) \Leftrightarrow P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$$

ή

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x + 1)(2x^2 - 7x + 3)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$(x + 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = 3$$

β)

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 & x^2 - 1 \\ -2x^3 & + 2x \\ \hline -5x^2 - 2x + 3 & \\ 5x^2 & - 5 \\ \hline -2x - 2 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 1)(2x - 5) + (-2x - 2)$$

γ) Από το (α) ερώτημα έχουμε $P(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 3)$ και από το (β) ερώτημα έχουμε ότι $v(x) = -2x - 2 = -2(x+1)$.

Για να ορίζεται η ανίσωση $\frac{v(x)}{P(x)} \geq 0$ πρέπει

$$P(x) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 7x + 3) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x \neq -1} \text{ και } \boxed{x \neq \frac{1}{2}} \text{ και } \boxed{x \neq 3}$$

Τότε:

$$\frac{v(x)}{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)}{(x+1)(2x^2 - 7x + 3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{2x^2 - 7x + 3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 < 0$$

Το πρόσημο του $2x^2 - 7x + 3$ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$2x^2 - 7x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\frac{1}{2} < x < 3$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Απλοποιούμε τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, με αναγωγή τους στο 1^ο τεταρτημόριο:

$$\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\eta\mu(\theta - \pi) = \eta\mu[-(\pi - \theta)] = -\eta\mu(\pi - \theta) = -\eta\mu\theta$$

Τότε το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -\eta\mu\theta x + \sigma\upsilon\nu\theta y = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta x + \eta\mu\theta y = 1 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες του συστήματος:

$$D = \begin{vmatrix} -\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \end{vmatrix} = -\eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = -(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = -1 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & \sigma\upsilon\nu\theta \\ 1 & \eta\mu\theta \end{vmatrix} = \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -\eta\mu\theta & 1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta & 1 \end{vmatrix} = -\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$$

Αφού $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{-1}, \frac{-\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{-1} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) \end{aligned}$$

Γ.2. α) Η $f(x) = (10^a - 3)\sigma\upsilon\nu x - 4$ είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu x + c$ με $\rho = 10^a - 3$ και $c = -4$.

Η μέγιστη τιμή της $f(x)$ είναι $|\rho| + c = |10^a - 3| - 4$, οπότε:

$$|10^a - 3| - 4 = 3 \Leftrightarrow |10^a - 3| = 3 + 4 \Leftrightarrow |10^a - 3| = 7$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10^a - 3 = -7 \\ \text{ή} \\ 10^a - 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^a = -4 \text{ (αδύνατη αφού } 10^a > 0) \\ \text{ή} \\ 10^a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow 10^a = 10^1 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$$

β) Έχουμε:

$$xy = f(\theta) \Leftrightarrow xy = 7\sin\theta - 4$$

$$\Leftrightarrow (\sin\theta - \eta\mu\theta)(\sin\theta + \eta\mu\theta) = 7\sin\theta - 4$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\theta - \eta\mu^2\theta = 7\sin\theta - 4$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\theta - (1 - \sin^2\theta) = 7\sin\theta - 4$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta - 7\sin\theta + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta - 7\sin\theta + 3 = 0$$

Θέτουμε $\sin\theta = \omega$ με $-1 \leq \omega \leq 1$, οπότε η εξίσωση γίνεται $2\omega^2 - 7\omega + 3 = 0$. Οι ρίζες της είναι $\omega = 3$ (απορρίπτεται) και $\omega = \frac{1}{2}$.

Τότε:

$$\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Είναι $\ln(2e^2) = \ln 2 + \ln e^2 = \ln 2 + 2\ln e = \ln 2 + 2 \cdot 1 = 2 + \ln 2 > 2$,

αφού $1 < 2 \xrightarrow{\ln x} \ln 1 < \ln 2 \Leftrightarrow 0 < \ln 2$ άρα $\ln(2e^2) > 2$

Επίσης $2 < 3 \xrightarrow{e^x} e^2 < e^3 \Leftrightarrow e^2 + e^2 < e^3 + e^2 \Leftrightarrow 2e^2 < e^2 + e^3 \xrightarrow{\ln x} \Leftrightarrow \ln(2e^2) < \ln(e^2 + e^3)$

Άρα

$$2 < \ln(2e^2) < \ln(e^3 + e^2)$$

Για να ορίζεται η $f(x)$ πρέπει:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} e^x - e^2 > 0 \\ \text{και} \\ \ln(e^x - e^2) - 2 \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} e^x > e^2 \\ \text{και} \\ \ln(e^x - e^2) \neq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ e^x - e^2 \neq e^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ e^x \neq 2e^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ \ln e^x \neq \ln(2e^2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ x \ln e \neq \ln(2e^2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 2 \\ \text{και} \\ x \neq \ln(2e^2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in (2, \ln(2e^2)) \cup (\ln(2e^2), +\infty)
 \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$A = (2, \ln(2e^2)) \cup (\ln(2e^2), +\infty)$$

Δ.2. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει: $y - 2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 2$

$$\begin{aligned}
 \text{Τότε } \frac{y^2 - 3}{y - 2} \geq 6 & \Leftrightarrow \frac{y^2 - 3}{y - 2} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 3 - 6(y - 2)}{y - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{y^2 - 3 - 6y + 12}{y - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 6y + 9}{y - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y - 3)^2}{y - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow_{y \neq 2} (y - 3)^2 (y - 2) \geq 0
 \end{aligned}$$

Οι ρίζες των παραγόντων του γινομένου είναι οι $y = 3$, $y = 2$ και για το πρόσημο των παραγόντων έχουμε:

y	-∞	2	3	+∞
$(y - 3)^2$	+	+	0	+
$y - 2$	-	0	+	+
$(y - 3)^2(y - 2)$	-	0	+	+

$$\text{Τότε } (y - 3)^2 (y - 2) \geq 0 \Leftrightarrow_{y \neq 2} y > 2 \text{ δηλαδή } y \in (2, +\infty)$$

- Δ.3. α) Έχουμε αποδείξει από το Δ.1. ότι $\ln(e^3 + e^2) > \ln(2e^2)$
 άρα το $x_0 \in (\ln(2e^2), +\infty)$ που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού Α
 της f.

$$\begin{aligned} \text{Τότε } f(x_0) &= \frac{[\ln(e^{x_0} - e^2)]^2 - 3}{\ln(e^{x_0} - e^2) - 2} = \frac{[\ln(e^{\ln(e^3 + e^2)} - e^2)]^2 - 3}{\ln(e^{\ln(e^3 + e^2)} - e^2) - 2} \stackrel{e^{\ln \alpha} = \alpha}{=} \\ &= \frac{[\ln(e^3 + e^2 - e^2)]^2 - 3}{\ln(e^3 + e^2 - e^2) - 2} = \frac{(\ln e^3)^2 - 3}{\ln e^3 - 2} = \\ &= \frac{(3 \ln e)^2 - 3}{3 \ln e - 2} = \frac{(3 \cdot 1)^2 - 3}{3 \cdot 1 - 2} = \frac{9 - 3}{3 - 2} = \frac{6}{1} = 6 \end{aligned}$$

- β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in (\ln(2e^2), +\infty)$ είναι
 $f(x) \geq f(x_0)$

$$\text{Είναι } f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 6 \Leftrightarrow \frac{[\ln(e^x - e^2)]^2 - 3}{\ln(e^x - e^2) - 2} \geq 6$$

Θέτουμε

$$\ln(e^x - e^2) = y,$$

οπότε:

$$\frac{y^2 - 3}{y - 2} \geq 6 \stackrel{(\Delta.2.)}{\Leftrightarrow} y > 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - e^2) > 2$$

$$\Leftrightarrow e^x - e^2 > e^2$$

$$\Leftrightarrow e^x > 2e^2$$

$$\stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x > \ln(2e^2)$$

$$\Leftrightarrow x \ln e > \ln(2e^2)$$

$$\Leftrightarrow x > \ln(2e^2), \text{ που ισχύει.}$$

Το $f(x_0)$ δεν είναι ελάχιστο της συνάρτησης γιατί, από την παραπάνω
 απόδειξη, η σχέση $f(x) \geq f(x_0)$ αληθεύει μόνο στο διάστημα
 $(\ln(2e^2), +\infty)$ και όχι σε όλο το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.