

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 8 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία. Σελίδα 43 του σχολικού βιβλίου.

A2. Θεωρία Σελίδα 58 του σχολικού βιβλίου.

A3. Θεωρία. Σελίδα 83 του σχολικού βιβλίου.

- A4. α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$

$$2\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (\sqrt{2})^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 \cdot 1^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1.$$

B2. Έστω $\varphi = (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \stackrel{(B1)}{\Leftrightarrow} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \hat{\varphi} = 45^\circ.$$

B3. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 1 + 1^2 = 5 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$

$$|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha})^2 - 2 \cdot 2\vec{\alpha} \cdot 3\vec{\beta} + (3\vec{\beta})^2 = 4(\sqrt{2})^2 - 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1^2 = 5$$

$$\Rightarrow |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{5}$$

$$\text{Οπότε } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|.$$

Δεύτερος τρόπος.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| \quad \text{ή} \quad (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2$$

$$\text{ή} \quad 3\vec{\alpha}^2 - 14\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 8\vec{\beta}^2 = 0 \quad \text{ή} \quad 3 \cdot 2 - 14 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 0, \text{ ισχύει.}$$

B4. Έστω $\vec{\gamma} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$, τότε γνωρίζουμε ότι $\vec{\gamma} // \vec{\alpha}$ δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός μ ώστε να ισχύει $\vec{\gamma} = \mu \cdot \vec{\alpha}$ (1).

Σύμφωνα με τον τύπο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ έχουμε:

$$\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\mu \cdot \vec{\alpha}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \mu |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \mu = \frac{\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}|^2} \Leftrightarrow \mu = \frac{2|\vec{\alpha}|^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}.$$

Τελικά από τη σχέση (1) προκύπτει: $\vec{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τις κορυφές B, Γ του τριγώνου είναι: $\lambda_{\text{BG}} = \frac{y_{\Gamma} - y_B}{x_{\Gamma} - x_B} = \frac{1 - 4}{2 - 4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Η εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου θα είναι:

$$y - y_{\Gamma} = \lambda_{\text{BG}}(x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Leftrightarrow 2y = 3x - 4 \Leftrightarrow 3x - 2y - 4 = 0.$$

Το ύψος ΓΔ του τριγώνου είναι κάθετο στην πλευρά ΑΒ οπότε θα ισχύει:

$$\Gamma\Delta \perp \text{ΑΒ} \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot \lambda_{\text{ΑΒ}} = -1 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lambda_{\text{ΑΒ}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-1)}{4 - 5} = \frac{4 + 1}{-1} = -5$$

$$\text{Από } (1) \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot (-5) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{1}{5}.$$

Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου θα είναι:

$$y - y_{\Gamma} = \lambda_{\Gamma\Delta} (x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} + 1 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5y = x + 3 \Leftrightarrow x - 5y + 3 = 0.$$

Γ2. Για τις ευθείες που διέρχονται από την κορυφή Γ του τριγώνου διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Εξετάζουμε αν η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_1 : x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ είναι λύση, δηλαδή αν $d(O, \varepsilon_1) = 2$.

$$\text{Έχουμε: } d(O, \varepsilon_1) = \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Άρα η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_1 : x = 2$ αποτελεί λύση.

2^η περίπτωση: Εξετάζουμε αν υπάρχουν ευθείες της μορφής: $\varepsilon : y - y_{\Gamma} = \lambda(x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x - y + 1 - 2\lambda = 0$ που να αποτελούν επίσης λύση.

Πρέπει και αρκεί:

$$d(O, \varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|1 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |1 - 2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \quad |1 - 2\lambda| \geq 0, 2\sqrt{\lambda^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow |1 - 2\lambda|^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1})^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 4(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 4\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

Άρα η ευθεία,

$$\varepsilon : -\frac{3}{4}x - y + 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x - y + 1 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3x - 4y + 10 = 0$$

αποτελεί επίσης λύση.

Γ3. i) Αφού η παραβολή C έχει κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$, θα έχει εξίσωση της μορφής $C : x^2 = 2py$.

$$\Gamma(2, 1) \in C \Leftrightarrow x_{\Gamma}^2 = 2py_{\Gamma} \Leftrightarrow 2^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow 2p = 4 \Leftrightarrow p = 2.$$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $C : x^2 = 2 \cdot 2y \Leftrightarrow x^2 = 4y$.

ii) Έστω ε η εφαπτομένη της C που είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

Αν $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ε με την C θα είναι:

$$\varepsilon : xx_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow xx_1 = 2(y + y_1) \Leftrightarrow$$

$$xx_1 = 2y + 2y_1 \Leftrightarrow 2y = x_1x - 2y_1 \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{2}x - y_1 \quad (2)$$

$$\text{Αφού } \varepsilon \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3.$$

$$\text{Όμως το } M(x_1, y_1) \in C \Leftrightarrow x_1^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 3^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 4y_1 = 9 \Leftrightarrow y_1 = \frac{9}{4}.$$

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4y = 4 \cdot \frac{3}{2}x - 4 \cdot \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4y = 6x - 9 \Leftrightarrow 6x - 4y - 9 = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $C_1 : 3x^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$

Έχουμε: $\alpha^2 = 4$, $\beta^2 = 3$ και επειδή $4 > 3$ οι εστίες της C_1 βρίσκονται στον x' αξ.

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow \gamma^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

$E'(-1,0)$, $E(1,0)$ και $B(0, \sqrt{3})$ ή $B(0, -\sqrt{3})$.

$$(BE') = \sqrt{(x_{E'} - x_B)^2 + (y_{E'} - y_B)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(BE) = \sqrt{(1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(E'E) = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

Το τρίγωνο $BE'E$ είναι ισόπλευρο.

Δεύτερος τρόπος

BO (ή $B'O$) ύψος και διάμεσος του τριγώνου $BE'E$ (ή $B'E'E$), άρα $BE = BE'$.

$$\text{Το } B \text{ είναι σημείο της έλλειψης } (BE) + (BE') = 2a \xRightarrow[\substack{\alpha=2 \\ BE=BE'}]{\substack{\alpha=2 \\ BE=BE'}} (BE) = (BE') = 2.$$

Επίσης $(E'E) = 2$, επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο πλευράς 2.

Δ2. Αν αντικαταστήσουμε $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ στις εξισώσεις των δύο κωνικών, παρατηρούμε ότι επαληθεύονται.

$$\text{Πράγματι: } 3(\sqrt{2})^2 + 4(\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12 \text{ και } (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

άρα το σημείο $P(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ είναι κοινό των C_1, C_2 .

Το σύστημα των εξισώσεων των C_1, C_2 μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα με αγνώστους x^2, y^2 . Δεδομένου ότι έχει τη λύση $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ οι υπόλοιπες λύσεις θα είναι: $(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, που είναι και οι συντεταγμένες των υπολοίπων κοινών σημείων.

Δεύτερος τρόπος.

Τα σημεία τομής των κωνικών προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ 4x^2 + 4y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} & x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}} & y = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Τρίτος τρόπος

Αφού παρατηρήσουμε ότι $P(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ είναι κοινό σημείο των C_1, C_2 και γνωρίζοντας ότι οι κωνικές έχουν άξονες συμμετρίας $x'x$, $y'y$ και κέντρο συμμετρίας το O , συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα κοινά σημεία είναι: $(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$.

Δ3. $2(OM)^2 = 7 \Leftrightarrow (OM) = \sqrt{\frac{7}{2}}$, άρα το M θα είναι σημείο του κύκλου C_2 .

$(ME) + (ME') = 4 \Leftrightarrow (ME) + (ME') = 2\alpha$, άρα το M είναι σημείο της έλλειψης C_1 . Το M είναι κοινό σημείο των C_1, C_2 , επομένως από το Δ2,

$$M(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } M(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } M(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } M(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}).$$

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_1 , έστω ε_p , στο $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ είναι:

$$\varepsilon_p : \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1 \Leftrightarrow 3xx_1 + 4yy_1 = 12 \Leftrightarrow 3x\sqrt{2} + 4y\sqrt{\frac{3}{2}} = 12.$$

$$\text{Η } \varepsilon_p \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσεως } \lambda = -\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E'PE}$, έστω δ , είναι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη ε_p στο σημείο P , επομένως αν λ' είναι ο συντελεστής διεύθυνσεως της δ , τότε:

$$\lambda \cdot \lambda' = -1 \Leftrightarrow \lambda' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Η ευθεία δ διέρχεται από το $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως

$$\lambda' = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ άρα, } \delta : y - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{2}).$$