

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 8 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα με τον άξονα $y'y$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσής λ_1, λ_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 9

A2. Να ορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης λ μίας ευθείας ε , μη παράλληλης με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 3

A3. Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ , ο οποίος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$. Αν $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου C , να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε στον κύκλο C , στο σημείο του A .

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

β. Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται πάντοτε από τον τύπο $d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει πάντοτε κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

- δ. Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E'ME}$, όπου E', E είναι οι εστίες της έλλειψης.
- ε. Αν C είναι μία παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$, $p \in \mathbb{R}$ τότε σε κάθε περίπτωση ο p ισούται με την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$.

B1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Μονάδες 5

B3. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(5, -1), B(4, 4)$ και $\Gamma(2, 1)$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ και του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την κορυφή Γ του τριγώνου και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2 μονάδες.

Μονάδες 8

Γ3. i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C που διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου, έχει κορυφή το $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Μονάδες 5

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C , η οποία είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η έλλειψη C_1 με εξίσωση $C_1 : 3x^2 + 4y^2 = 12$ και εστίες E, E' και ο κύκλος C_2 με εξίσωση $C_2 : x^2 + y^2 = \frac{7}{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEE' είναι ισόπλευρο, όπου B είναι ένα από τα άκρα του μικρού άξονα της έλλειψης.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ είναι κοινό σημείο των δύο κωνικών τομών C_1, C_2 και να υπολογίσετε όλα τα κοινά τους σημεία.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε τα σημεία $M(x_0, y_0)$ τα οποία είναι τέτοια ώστε: $2(OM)^2 = 7$ και $(ME) + (ME') = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 8

Δ4. Να υπολογίσετε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{E'PE}$, όπου $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Μονάδες 8

Σας ευχόμαστε επιτυχία