

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 94.

A.2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 95 .

- A.3.** α) Σωστό
 β) Λάθος
 γ) Λάθος
 δ) Λάθος
 ε) Λάθος

A.4.

Αριθμός	Με μορφή λογαρίθμου	Με μορφή δύναμης
8	$\log_7 7^8$	$3^{\log_3 8}$
4	$\log_3 (3^4)$	$8^{2\log_8 2}$
2012	$\log 10^{2012}$	$e^{\ln 2012}$

ΘΕΜΑ Β

B.1. Έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ (1).

Επειδή όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, είναι το -1 ή το 1.

Το -1 δεν είναι ρίζα, γιατί $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -4$.

Ενώ το 1 είναι ρίζα, γιατί $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 1 = 0$.

Με εφαρμογή του σχήματος Horner έχουμε:

2	-3	0	1	$\rho=1$
↓	2	-1	-1	
2	-1	-1	0	

Η εξίσωση (1) είναι τώρα ισοδύναμη με την $(x-1)(2x^2-x-1)=0$.

Έτσι, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

ή $2x^2-x-1=0$ με ρίζες $x=1$ ή $x=-\frac{1}{2}$ αφού $\Delta=9$.

Οι ρίζες λοιπόν της εξίσωσης (1) είναι $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=1$ (διπλή).

B.2. Επειδή το $\alpha=1$ είναι η διπλή ρίζα τότε:

$$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\kappa \in \mathbb{Z}) \quad \text{ή}$$

$x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$. Όμοια, το $\beta = -\frac{1}{2}$ είναι η άλλη ρίζα οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (\kappa \in \mathbb{Z}).$$

B.3. Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ πρέπει:
 $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1) \leq 0$. Το πρόσημο της $f(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$2x^2-x-1$	+	0	-	0
$f(x)$	-	0	+	0

Έτσι, οι τιμές των $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ είναι: $x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x=1$.

B.4. Έχουμε $f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x)^2 + 1 = -2x^3 - 3x^2 + 1$.

Εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 - 3x^2 + 0x + 1 & x^2 + 1 \\ \underline{2x^3 \quad + 2x} & -2x - 3 \\ -3x^2 + 2x + 1 & \\ \underline{+ 3x^2 \quad + 3} & \\ 2x + 4 & \end{array}$$

Το πηλίκο είναι: $\pi(x) = -2x - 3$ και το υπόλοιπο: $\upsilon(x) = 2x + 4$.

Επομένως, $f(-x) = (x^2 + 1)(-2x - 3) + (2x + 4)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Αφού $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει:

$$2 \ln \beta = \ln \alpha + \ln \gamma \Leftrightarrow \ln \beta^2 = \ln (\alpha \gamma) \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \gamma \quad (1).$$

Για την συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \stackrel{(1)}{=} \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2 < 0, \text{ αφού } \beta > 0.$$

Επειδή $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$ είναι $f(x) > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Έτσι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το $\mathbb{R}$.

Γ.2 α) Είναι $\alpha_1 = \alpha = \ln e = 1, \alpha_2 = e^{\ln \beta} = \beta, \alpha_3 = 10^{\log \gamma} = \gamma$.

Επειδή $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$, όπου λ ο λόγος της προόδου, τότε για $v = 5$ έχουμε $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4$. Έχουμε $\alpha_5 = 256$ και $\alpha_1 = 1$, επομένως $256 = 1 \cdot \lambda^4 \Leftrightarrow \lambda^4 = 4^4 \Leftrightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = -4$.

Επειδή $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta}{1} > 0$ τότε η τιμή $\lambda = -4$ απορρίπτεται.

Για $\lambda = 4$ έχουμε $\beta = \alpha_1 \cdot \lambda = 4$ και $\gamma = \beta \cdot \lambda = 4 \cdot 4 = 16$.

Έτσι, λοιπόν $\alpha = 1, \beta = 4$ και $\gamma = 16$.

β) Για $\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 16$ είναι $f(x) = x^2 + 4x + 16$ και $g(x) = \eta \mu^2 x + 21$.

Η εξίσωση $f(\sin x) = g(x)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\sin^2 x + 4 \sin x + 16 = \eta \mu^2 x + 21 \Leftrightarrow \sin^2 x + 4 \sin x - \eta \mu^2 x - 5 = 0 \quad (2).$$

Επειδή $\eta \mu^2 x = 1 - \sin^2 x$ τότε από τη (2) έχουμε:

$$\sin^2 x + 4 \sin x - 1 + \sin^2 x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 4 \sin x - 6 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0 \quad (3).$$

Θέτουμε $\sin x = y$ όπου $-1 \leq y \leq 1$ οπότε η (3) γίνεται $y^2 + 2y - 3 = 0$ με ρίζες $y = 1$ ή $y = -3$. Η $y = -3$ απορρίπτεται.

Για $y = 1$ έχουμε: $\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Όμως, $x \in (0, 4\pi] \Leftrightarrow 0 < x \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa \leq 2$.

Ο κ είναι ακέραιος, οπότε $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$.

Για $\kappa = 1: x = 2\pi$ και για $\kappa = 2: x = 4\pi$.

Γ.3. Αφού $\omega > 0$ τότε $\beta_1 = 2\pi$ και $\beta_2 = 4\pi$. Η διαφορά είναι: $\omega = \beta_2 - \beta_1 = 2\pi$.

Ο νιοστός όρος της αριθμητικής προόδου (β_v) είναι:

$$\beta_v = \beta_1 + (v-1)\omega = 2\pi + (v-1)2\pi = 2\pi v.$$

Το άθροισμα των v πρώτων δίνεται από τον τύπο $S_v = \frac{v}{2}(\beta_1 + \beta_v)$.

Επειδή $S_v = 2550\pi$ έχουμε:

$$2550\pi = \frac{v}{2}(2\pi + 2\pi v) \Leftrightarrow 2550\pi = v\pi(v+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(v+1) = 2550 \Leftrightarrow v^2 + v - 2550 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2550) = 10201 = 101^2$.

$$\text{Έτσι, } v = \frac{-1+101}{2} = 50 \text{ ή } v = \frac{-1-101}{2} = -51.$$

Επειδή ο v είναι θετικός ακέραιος, τότε $v = 50$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Για να ορίζεται η g πρέπει να ισχύει $x > 0$.

Έτσι, $A_g = (0, +\infty)$ (είναι $\ln 2 \neq 0$ γιατί $2 \neq 1$)

Για να συγκρίνουμε $g(3)$ και 2 βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς $g(3) - 2$.

$$\text{Είναι } g(3) - 2 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 2 = \frac{\ln 3 - 2\ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 3 - \ln 2^2}{\ln 2} = \frac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2}.$$

Όμως $\frac{3}{4} < 1$ άρα $\ln \frac{3}{4} < 0$ και $2 > 1$, οπότε $\ln 2 > 0$.

Είναι $g(3) - 2 < 0 \Leftrightarrow g(3) < 2$.

Εναλλακτικά λύνουμε την

$$g(3) < 2 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2} < 2 \stackrel{\text{επί } \ln 2 > 0}{\Leftrightarrow} \ln 3 < 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 2^2 \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 4 \text{ η οποία}$$

αληθεύει, γιατί $3 < 4$.

Δ.2. Για να ορίζεται η f πρέπει $2^x - 3 > 0$ και $\ln(2^x - 3) \neq 0$.

$$\text{Έχουμε } 2^x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 3 \Leftrightarrow \ln 2^x > \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 2 > \ln 3 \stackrel{\ln 2 > 0}{\Leftrightarrow} x > \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

και

$$\ln(2^x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2^x - 3) \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2^x - 3 \neq 1 \Leftrightarrow 2^x \neq 4 \Leftrightarrow 2^x \neq 2^2 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Από το Δ1 είναι $\frac{\ln 3}{\ln 2} < 2$, οπότε $A_f = (\frac{\ln 3}{\ln 2}, 2) \cup (2, +\infty)$.

Δ.3. Είναι $f(\log_2 \kappa) = \frac{1}{\ln(2^{\log_2 \kappa} - 3)} = \frac{1}{\ln(\kappa - 3)}$, αφού $2^{\log_2 \kappa} = \kappa$.

$$\text{Έχουμε } f(\log_2 \kappa) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(\kappa-3)} < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Επειδή } \kappa-3 > 1 \text{ ισχύει } \ln(\kappa-3) > 0.$$

$$\text{Οπότε } \ln(\kappa-3) > 2 \Leftrightarrow \ln(\kappa-3) > \ln e^2 \Leftrightarrow \kappa-3 > e^2 \Leftrightarrow \kappa > 3+e^2.$$

$$\text{Τελικά } \kappa \in (3+e^2, +\infty).$$

Δ.4. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $(-x^3 - 7x^2 + 6):(x+1)$

$$\text{είναι } v(x) = -(-1)^3 - 7(-1)^2 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0.$$

$$\text{Έχουμε } v(x) = (f(\beta) - 1) \cdot x + g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \dots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2}.$$

Από την ισότητα των δύο πολωνύμων έχουμε :

$$f(\beta) - 1 = 0 \text{ και } g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \dots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2} = 0.$$

Διαδοχικά έχουμε:

$$f(\beta) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(2^\beta - 3)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^\beta - 3) = \ln e \Leftrightarrow 2^\beta - 3 = e \Leftrightarrow 2^\beta = e + 3 \quad (1) \text{ και}$$

$$g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \dots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\ln 2} + \frac{\ln \alpha^2}{\ln 2} + \frac{\ln \alpha^3}{\ln 2} + \dots + \frac{\ln \alpha^{20}}{\ln 2} = \frac{210}{\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} (\ln \alpha + 2 \ln \alpha + 3 \ln \alpha + \dots + 20 \ln \alpha) = \frac{210}{\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\ln 2} (1 + 2 + 3 + \dots + 20) = \frac{210}{\ln 2} \quad (2).$$

Το $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20$ είναι άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1$, $\omega = 1$. Έτσι, $S_{20} = \frac{20}{2} (\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10(1 + 20) = 210$.

$$\text{Από τη (2) προκύπτει } \frac{210 \cdot \ln \alpha}{\ln 2} = \frac{210}{\ln 2} \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e \quad (3)$$

$$\text{Έτσι, έχουμε } e^{\beta \cdot \ln 2} = (e^{\ln 2})^\beta = 2^\beta \stackrel{(1)}{=} e + 3 \stackrel{(3)}{=} \alpha + 3.$$