Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. **I.** Σχολικό βιβλίο σελ. 41.
II. Σχολικό βιβλίο σελ. 89.

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 71.

γ. Σχολικό βιβλίο σελ.60.

δ. Σ, Λ, Σ, Λ, Λ.

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2^2 = 4$

και $(\vec{\gamma} + 3\vec{\alpha}) \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\gamma} + 3\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\gamma}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{\beta}\,\vec{\gamma} = -3\vec{\alpha}\vec{\beta} = -3\cdot 4 = -12$ **(I)**

β. $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\cdot 4 + |\vec{\beta}|^2 =$

$= 4 - 8 + 9 = 5 \Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{5}.$

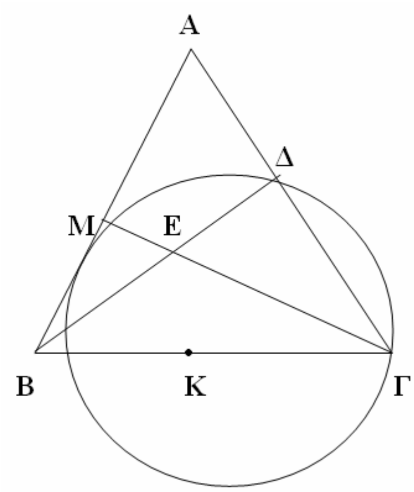
γ. Όμως $(\vec{\gamma} - 2\vec{\alpha}) = \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\gamma} - 2\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + 2\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$
οπότε η **(I)** γράφεται:
$\vec{\beta}(\lambda\vec{\alpha} + 2\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}) = -12 \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \lambda\vec{\beta}^2 = -12$
$\Leftrightarrow \lambda\cdot 4 + 2\cdot 4 - \lambda\cdot 9 = -12 \Leftrightarrow 12 + 8 = 5\lambda \Leftrightarrow \lambda = 4.$

δ. Αφού $\lambda = 4$ τότε $\vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} + 2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = 6\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}.$
Τότε $\vec{\gamma}(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\gamma}\vec{\alpha} - \vec{\gamma}\vec{\beta} = (6\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})\vec{\alpha} - \vec{\beta}\vec{\gamma} = 6\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}\vec{\gamma} =$
$= 6\cdot 2^2 - 4\cdot 4 + 12 = 24 - 16 + 12 = 20 > 0$.

δηλ. $\sigma\upsilon\nu(\vec{\gamma}, \widehat{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha} - \vec{\beta})}{|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|} > 0$

δηλ. η γωνία των $\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι οξεία.

ΘΕΜΑ 3ο



α. Αφού ΑΓ $\perp$ ΒΔ και $\lambda_{B\Delta} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ θα είναι $\lambda_{A\Gamma}$=-4 και

$A\Gamma:\ y-2=-4(x-1) \Leftrightarrow y-2=-4x+4 \Leftrightarrow 4x+y-6=0$.

Λύνω το (Σ) των εξισώσεων $\left\{\begin{matrix} A\Gamma: 4x+y-6=0 \\ \Gamma M: 3x+2y+3=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-6 \end{cases}$ δηλαδή Γ(3,-6).

β. Αν Β(x_β, y_β), τότε το μέσο Μ της ΑΒ είναι $M\left(\frac{x_\beta+1}{2}, \frac{y_\beta+2}{2}\right)$ και οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ΓΜ δηλαδή

$3\frac{x_\beta+1}{2}+2\frac{y_\beta+2}{2}+3=0 \Leftrightarrow 3x_\beta+3+2y_\beta+4+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_\beta+2y_\beta=-13$ **(I)**

Όμως οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν και την εξίσωση του ΒΔ δηλαδή
$x_\beta-4y_\beta-5=0$ **(II)**

Λύνω το (Σ) $\left\{\begin{matrix} x_\beta-4y_\beta=5 \\ 3x_\beta+2y_\beta=-13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y_\beta=-2 \\ x_\beta=-3 \end{cases}$ δηλαδή Β(-3,-2).

Τότε $M(-1,0)$.

γ. Για να βρω τις συντεταγμένες του Ε

λύνω το (Σ) $\left\{\begin{matrix} x-4y-5=0 \\ 3x+2y+3=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{9}{7} \end{cases}$ δηλ. $E\left(-\frac{1}{7}, \frac{-9}{7}\right)$.

Τότε $\vec{EB}\left(-\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}\right)$ και $\vec{E\Gamma}=\left(\frac{22}{7}, -\frac{33}{7}\right)$

Οπότε (ΕΒΓ)= $\frac{1}{2}\left|\det(\vec{EB},\ \vec{E\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -\frac{20}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{22}{7} & -\frac{33}{7}\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|\frac{660}{49}+\frac{110}{49}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{770}{49} = \frac{55}{7}$ τ.μ.

δ. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + (\lambda+8)^2 - 4\cdot 3 =$

$= \lambda^2 + \lambda^2 + 16\lambda + 64 - 12 = 2\lambda^2 + 16\lambda + 52$

που είναι τριώνυμο με $\Delta = 16^2 - 4\cdot 2\cdot 52 = 256 - 416 = -160 < 0$

δηλ. $2\lambda^2+16\lambda+52>0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

με $K\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{-\lambda-8}{2}\right)$ και $\rho = \frac{\sqrt{2\lambda^2+16\lambda+52}}{2}$.

Για να έχει διάμετρο ΒΓ, πρέπει το κέντρο του Κ να είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και η ακτίνα να είναι ίση με το μισό του μήκους της ΒΓ ή οι συντεταγμένες των Β και Γ να επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου.

Το μέσο Κ του ΒΓ είναι Κ(0,-4).

Πρέπει λοιπόν $\left\{\begin{matrix} -\frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{-\lambda-8}{2} = -4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda = 0$

Για λ=0 η εξίσωση του κύκλου γράφεται $(c): x^2 + y^2 + 8y + 3 = 0$ που έχει ακτίνα, $\rho = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{(B\Gamma)}{2}$

αφού $(B\Gamma) = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2+6)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ ή διαπιστώνουμε ότι επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των Β και Γ.

ΘΕΜΑ 4^o

α. **α΄ τρόπος:** Η εξίσωση (1) γράφεται:

$\chi^2+y^2+2\chi\psi+8\chi+8\psi+12=0 \Leftrightarrow (\chi+\psi)^2+8(\chi+\psi)+12=0$,

$\Delta=64-48=16$ οπότε:

$\chi+\psi=-6$ ή $\chi+\psi=-2$

δηλ. $\chi+\psi+6=0$ (ε_1) ή $\chi+\psi+2=0$ (ε_2),

που είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών, αφού έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ=-1

ή β΄ τρόπος: η εξίσωση (1) γράφεται:

$\chi^2+ y^2+2\chi\psi+8\chi+8\psi+12=0 \Leftrightarrow y^2+(2\chi+8)\psi+ \chi^2+8\chi+12=0$.

$\Delta=(2\chi+8)^2-4(\chi^2+8\chi+12)=16$ οπότε $\psi=-\chi-4+2$ ή $\psi=-\chi-4-2$ δηλ. $\chi+\psi+6=0$ (ε_1) ή $\chi+\psi+2=0$ (ε_2), που είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών αφού έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ=-1.

β. Το κέντρο Κ του κύκλου είναι το σημείο τομής της μεσοπαράλληλης (η) των (ε_1) και (ε_2) και της (ε):y=3x.
Η (ε_1) τέμνει τον y΄y στο Α(0,-2) και η (ε_2) τον y΄y στο Β(0,-6).
Άρα η (η) τέμνει τον y΄y στο μέσο Μ(0, -4) του ΑΒ.
Δηλαδή η: x+y+4=0
Λύνω το (Σ): $\left.\begin{matrix} x+y+4=0 \\ y=3x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ δηλ. Κ(-1, -3)
και $\rho = d(K_1, \varepsilon_1) = \dfrac{|-1-3+2|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Άρα C: $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 2$.

γ. $\left.\begin{matrix} x+y+2=0 \\ y=3x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+3x=-2 \\ y=3x \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ δηλ. $M\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Άρα η ελάχιστη απόσταση του Μ από τον κύκλο είναι

$$|MK-\rho| = \left|\sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3+\frac{3}{2}\right)^2} - \sqrt{2}\right| = \left|\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} - \sqrt{2}\right| =$$

$= \left|\sqrt{\dfrac{10}{4}} - \sqrt{2}\right| = \dfrac{\sqrt{10}}{2} - \sqrt{2}$ και η μέγιστη απόσταση του Μ από τον κύκλο

είναι $MK+\rho = \sqrt{\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-3+\dfrac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}} + \sqrt{2} =$

$= \sqrt{\dfrac{10}{4}} + \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{2}$

δ. Είναι $2\gamma = 10 \cdot 2 = 20$ δηλαδή γ=10
και $\dfrac{\beta}{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \beta = 3\alpha$. Όμως $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow 100 = \alpha^2 + 9\alpha^2 = 10\alpha^2$
δηλαδή $\alpha^2 = 10$ και $\beta^2 = 90$.
Άρα $C_1: \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{90} = 1$