Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεώρημα βλ. Βιβλίο ΟΕΔΒ Άλγεβρα Β΄ Λυκείου σελ. 74
Α.2. Θεωρία σελ. 136
Α.3. Θεωρία σελ. 124,125

Α.4. **α.** Β
β. Γ
γ. Β

Α.5. **α.** Σωστό
β. Λάθος
γ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Επειδή τα σημεία $A(0,\beta+5)$, και $B\left(\frac{4\pi}{\beta},4\beta^2\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχουμε:

$$f(0)=\beta+5 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 0=\beta+5 \Leftrightarrow \alpha=\beta+5 \quad (1)$$

$$f\left(\frac{4\pi}{\beta}\right)=4\beta^2 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta}{2}\cdot\frac{4\pi}{\beta}\right)=4\beta^2 \Leftrightarrow \alpha=4\beta^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$4\beta^2=\beta+5 \Leftrightarrow 4\beta^2-\beta-5=0 \text{ και } \Delta=(-1)^2-4\cdot4\cdot(-5)=81$$

$$\text{Άρα } \beta=\frac{1\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{1\pm9}{8}=\begin{cases}\boxed{\beta=-1} \text{ δεκτή } (\beta<0)\\ \beta=\frac{5}{4} \text{ (απορ.)}\end{cases}$$

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε $\boxed{\alpha=4}$

Άρα το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) έχει λύση $\alpha=4$ και $\beta=-1$.
Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι

$$f(x)=4\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow\boxed{f(x)=4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Β.2. Έχουμε **:** $f(x)=4\Leftrightarrow 4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=4\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x}{2}=2k\pi\Leftrightarrow x=4k\pi\ ,\ k\in Z$

Αλλά $0\le x\le 12\pi\Leftrightarrow 0\le 4k\pi\le 12\pi\Leftrightarrow\boxed{0\le k\le 3}$.Άρα k=0,1,2,3

Για k=0 $x_1=0$

Για k=1 $x_2=4\pi$

Για k=2 $x_3=8\pi$

Για k=3 $x_4=12\pi$

Αρα τα σημεία τομής της f με την ευθεία y=3 είναι
$(0,4)$, $(4\pi,4)$, $(8\pi,4)$, $(12\pi,4)$.

Β.3. Επειδή ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)$ και είναι της μορφής $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 4 και η ελάχιστη τιμή της το –4.

Η περίοδός της είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Β.4. Έχουμε

$$A=f(4\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=4\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi)-4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right)=4-4\cdot\frac{1}{2}=2$$

Ακόμα $f(0)=4\cdot\sigma\upsilon\nu 0=4$ οπότε

$$B=3\cdot f(0)\cdot\frac{f(0)^{2010}-1}{f(0)-1}+4=3\cdot 4\cdot\frac{4^{2010}-1}{4-1}+4=$$

$$\cancel{3}\cdot 4\cdot\frac{4^{2010}-1}{\cancel{3}}+4=4\left(4^{2010}-1\right)+4=\boxed{4^{2011}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Έχουμε P(1)=1 και $P(-2)=10$

$P(1)=1\Leftrightarrow 1+\alpha-7+\beta+2=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=5$

$P(-2)=10\Leftrightarrow 16-8\alpha-28-2\beta+2=10\Leftrightarrow 4\alpha+\beta=-10$

Επομένως έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=5 \\ 4\alpha+\beta=-10 \end{array}\right\}$$ που έχει λύση $\alpha=-5$ και $\beta=10$.

Γ.2. α. Για $\alpha=-5$ και $\beta=10$ έχουμε $P(x)=x^4-5x^3-7x^2+10x+2$.
Τότε:

$$\begin{array}{l|l} x^4-5x^3-7x^2+10x+2 & x^3+x^2-2x \\ \hline -x^4-x^3+2x^2 & x-6 \\ \hline -6x^3-5x^2+10x+2 & \\ \hline 6x^3+6x^2-12x & \\ \hline x^2-2x+2 & \end{array}$$

Άρα το πηλίκο είναι $\Pi(x)=x-6$.
Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε
$P(x)=\left(x^3+x^2-2x\right)\Pi(x)+\upsilon(x)$
Επομένως $P(x)=\left(x^3+x^2-2x\right)(x-6)+x^2-2x+2$.

β. Έχουμε:
$P(x)=\upsilon(x)\Leftrightarrow\left(x^3+x^2-2x\right)\Pi(x)+\cancel{\upsilon(x)}=\cancel{\upsilon(x)}\Leftrightarrow$
$\left(x^3+x^2-2x\right)(x-6)=0\Leftrightarrow x(x-6)(x-1)(x+2)=0$
Άρα οι λύσεις είναι $x=0$, $x=-2$, $x=1$ και $x=6$

γ. Έχουμε:
$Q(x)>0\Rightarrow x^3+x^2-2x>0\Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)>0\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)>0$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x-1		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x+2		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x(x-1)(x+2)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως $x\in(-2,0)\cup(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $\frac{4-x}{4+x}>0$ και $4+x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -4$.

$\frac{4-x}{4+x}>0 \Leftrightarrow (4-x)(4+x)>0$ οπότε $x\in(-4,4)$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f=(-4,4)$.

Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων αρκεί f(0)=0,έτσι για x=0 έχουμε:

$f(0)=\ln\left(\frac{4-0}{4+0}\right)=\ln(1)=0$.

Δ2. $A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=$

$=\ln 7+\ln 3+\ln\left(\frac{5}{3}\right)+\ln(1)+\ln\left(\frac{3}{5}\right)+\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{1}{7}\right)=$

$=\ln\left(7\cdot\frac{1}{7}\right)+\ln\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)=\ln(1)+\ln(1)+\ln(1)=0$

Δ3. Η ανίσωση γίνεται:

$f(x)-f(-x)<-2\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)-\ln\left(\frac{4+x}{4-x}\right)<2\ln 3^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)-\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)^{-1}<2\ln 3^{-1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)+\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)<2\ln 3^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{2}\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)<\cancel{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)<\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

(η συνάρτηση y=lnx είναι γνησίως αύξουσα)

$\Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x}<\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x}-\frac{1}{3}<0 \Leftrightarrow \frac{4(2-x)}{3(4+x)}<0 \Leftrightarrow (2-x)(4+x)<0$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
(2-x)(4+x)		−	|	+	|	−	

Άρα $x\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f=(-4,4)$ οπότε τελικά $x\in(2,4)$

Δ4. Η εξίσωση γίνεται

$e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-4e^{f(x)}+3=0$

Θέτουμε $y=e^{f(x)}$ με $y>0$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται

$y^2-4y+3=0$ που έχει ρίζες τις y=1 και y=3

- Για y=1 έχουμε

  $$1=e^{f(x)}\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)}=1\Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x}=1\Leftrightarrow 4-x=4+x\Leftrightarrow x=0$$

  που γίνεται δεκτή γιατί $0\in A_f$.

- Για y=3 έχουμε

  $$3=e^{f(x)}\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)}=3\Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x}=3\Leftrightarrow$$

  $\Leftrightarrow 4-x=12+3x\Leftrightarrow x=-2$ που γίνεται δεκτή γιατί $-2\in A_f$.

  Άρα οι λύσεις είναι $x=0$ και $x=-2$.