Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 83

Β. **α.** Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 41
β. Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 113

Γ.
1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Λ
5. Λ

ΘΕΜΑ 2^{ο}

1. **α.** $\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|.|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2.1.\frac{1}{2} = 1$

β.
$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2.1 = 2^2 + 1^2 + 2 = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \sqrt{7}$$

γ. $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = \sqrt{3}$

2.

α. $\mathrm{A}\vec{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}\vec{\mathrm{B}} + \mathrm{A}\vec{\Gamma}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right) = \frac{3}{2}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)$

β. $\mathrm{B}\vec{\Gamma} = \mathrm{A}\vec{\Gamma} - \mathrm{A}\vec{\mathrm{B}} = \left(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) - \left(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}\right) = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

3. $$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\mathrm{AM}}\ \widehat{,}\ \vec{\mathrm{B\Gamma}}\right)=\frac{\vec{\mathrm{AM}}\cdot\vec{\mathrm{B\Gamma}}}{\left|\vec{\mathrm{AM}}\right|\cdot\left|\vec{\mathrm{B\Gamma}}\right|}\ (i)$$

Είναι $\vec{AM}\cdot\vec{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{3}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\frac{3}{2}(\vec{\alpha}^2-\beta^2)=\frac{3}{2}(4-1)=\frac{9}{2}$

και

$\left|\vec{\mathrm{AM}}\right|=\frac{3}{2}\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\frac{3}{2}\sqrt{7}$

$\left|\vec{\mathrm{B\Gamma}}\right|=\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{3}$

Άρα (i) $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\vec{\mathrm{AM}}\ \widehat{,}\ \vec{\mathrm{B\Gamma}}\right)=\dfrac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{7}\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{21}}{21}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

4. Αν $\vec{A\Delta}=\pi\rho o\beta_{\vec{\mathrm{A\Gamma}}}\vec{\mathrm{AM}}$ τότε $\vec{\mathrm{A\Delta}}\,//\,\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ δηλαδή $\vec{A\Delta}=\lambda\vec{\mathrm{A\Gamma}}$ και

$\vec{\mathrm{AM}}\cdot\vec{\mathrm{A\Gamma}}=\vec{\mathrm{A\Delta}}\cdot\vec{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{3}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\,\vec{\mathrm{A\Gamma}}^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\left(2\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\alpha}+\vec{\beta}^2\right)=\lambda\left(4\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow$

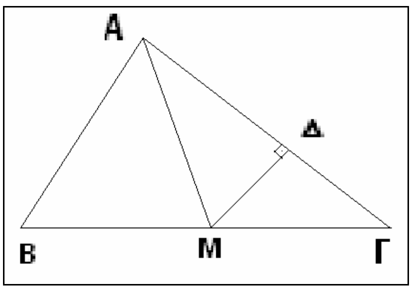
$\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2+\frac{9\vec{\alpha}\vec{\beta}}{2}+\frac{3}{2}\vec{\beta}^2=4\lambda\vec{\alpha}^2+\lambda\vec{\beta}^2+4\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot4+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=16\lambda+\lambda+4\lambda\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18=21\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$

δηλαδή $\vec{\mathrm{A\Delta}}=\frac{6}{7}\vec{\mathrm{A\Gamma}}\Rightarrow\left|\vec{\mathrm{A\Delta}}\right|=\frac{6}{7}\left|\vec{\mathrm{A\Gamma}}\right|=\frac{6\sqrt{21}}{7}$ αφού

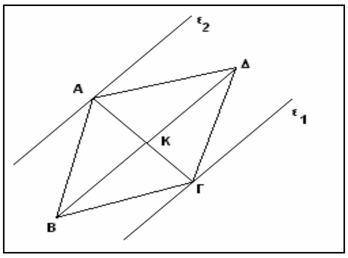
$\left|\vec{\mathrm{A\Gamma}}\right|^2=\vec{\mathrm{A\Gamma}}^2=(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=21\Leftrightarrow\left|\vec{\mathrm{A\Gamma}}\right|=\sqrt{21}$



ΘΕΜΑ 3^o

1. Το κέντρο Κ του παραλληλόγραμμου είναι σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Λύνω το (ε) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ δηλαδή Κ(4,5)

2. Η διαγώνιος ΑΓ έχει εξίσωση y=2x-3 ⇔ 2x-y-3=0 και η ΒΔ έχει εξίσωση y=x+1 ⇔ x-y+1=0 και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 //$ΒΔ. Αν Μ(α, β) σημείο της ευθείας (ε_1).



Τότε:

Θα είναι d(M,ΒΔ)=$\dfrac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|a - \beta + 1|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a - \beta + 1| = 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a - \beta + 1 = 2 \\ ή \\ \alpha - \beta + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - 1 = 0 \\ ή \\ \alpha - \beta + 3 = 0 \end{cases}$$

Άρα (ε_1):x-y-1=0 και (ε_2):x-y+3=0.

3. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των κορυφών του ΑΒΓΔ. Για την εύρεση του Α λύνω το (Σ) των εξισώσεων των (ε_1) και (ΑΓ) και για του Γ το (Σ) των (ε_2) και (ΑΓ). Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x + 3 - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ άρα } A(2,1) \text{ και}$$

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x + 3 + 3 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases} \text{ δηλαδή } \Gamma(6,9).$$

Αφού $\vec{A\Delta} = (4,6)$ και Α(2,1) τότε αν Δ(x_Δ, y_Δ) θα είναι:

$$\begin{cases} x_\Delta - 2 = 4 \\ y_\Delta - 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Delta = 6 \\ y_\Delta = 7 \end{cases} \text{ δηλαδή } \Delta(6,7) \text{ και αφού Κ μέσο ΒΔ θα είναι:}$$

$$\left.\begin{cases} x_\kappa = \dfrac{x_{\mathrm{B}}+x_\Delta}{2} \\ y_\kappa = \dfrac{y_{\mathrm{B}}+y_\Delta}{2} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} 4 = \dfrac{x_{\mathrm{B}}+6}{2} \\ 5 = \dfrac{y_{\mathrm{B}}+7}{2} \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{B}} = 2 \\ y_\Delta = 3 \end{cases} \text{δηλαδή B(2,3)}$$

4. $(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=2(\mathrm{AB\Delta})=2\dfrac{1}{2}\left|\det(\vec{\mathrm{AB}},\vec{\mathrm{A\Delta}})\right| = \left\|\begin{matrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{matrix}\right\| = |0-8| = 8\tau.\mu.$

ΘΕΜΑ 4^{o}

1. Είναι

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma = (-2\eta\mu\theta)^2+(4\sigma\upsilon\nu\theta)^2-4\eta\mu^2\theta =$$

$$= 4\eta\mu^2\theta+16\sigma\upsilon\nu^2\theta-4\eta\mu^2\theta = 16.\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0 \text{ αν } \theta\in\left(0,\frac{\Pi}{2}\right)$$

Άρα είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$ δηλαδή Κ(ημθ,-2συνθ) και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2} = \dfrac{4\sigma\upsilon\nu\theta}{2} = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

2. Είναι $\left.\begin{matrix} x_\kappa = \eta\mu\theta \\ y_\kappa = -2\sigma\upsilon\nu\theta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\theta = x_\kappa \\ \sigma\upsilon\nu\theta = -\dfrac{y_\kappa}{2} \end{cases}$ οπότε $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow x_\kappa + \dfrac{y^2_\kappa}{4} = 1$

δηλαδή τα κέντρα των κύκλων κινούνται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα y΄y. Είναι $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$ και $\beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2-\beta^2 = 4-1 = 3 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{3}$. Έχει λοιπόν εστίες Ε΄(0,-$\sqrt{3}$) και Ε(0,$\sqrt{3}$) μεγάλο άξονα 2α=2.2=4 και μικρό άξονα 2β=2 και εκκεντρότητα ε=$\dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

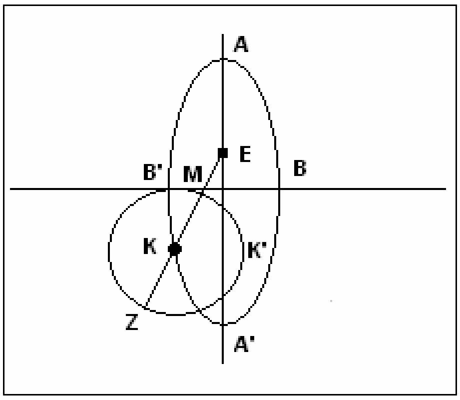
3. Είναι $x_0 = \eta\mu\theta > 0$ και $y_0 = -2\sigma\upsilon\nu\theta < 0$ γιατί θ ∈ (0, π/2) οπότε τα σημεία Κ ανήκουν στο τμήμα της έλλειψης που βρίσκεται στο 4^{o} τεταρτημόριο δηλαδή το Α΄Β.

4. Αν θ=$\dfrac{\Pi}{3}$ τότε ο κύκλος έχει κέντρο $\mathrm{K}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ και ρ=1. Τότε η ελάχιστη απόσταση της ευθείας Ε(0,$\sqrt{3}$) από τον κύκλο είναι

$d_{1}=$

$$=(\mathrm{EM})=(\mathrm{EK})-\rho=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(-1-\sqrt{3}\right)^2}-1 = \sqrt{\frac{3}{4}+1+3+2\sqrt{3}}-1 = \sqrt{\frac{19}{4}+2\sqrt{3}}-1 =$$

$= 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ενώ η μέγιστη είναι d_2=(ΕΖ)=(ΕΚ)+ρ=$\sqrt{\dfrac{19}{4}+2\sqrt{3}}+1$=3+$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.


A
E
B'
M
B
K
K'
Z
A'