



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(\chi_1, \psi_1)$ έχει εξίσωση $\chi \cdot \chi_1 + \psi \cdot \psi_1 = \rho^2$.
 (9 μονάδες)
- B.**
- α.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.
- β.** Δώστε τον ορισμό της υπερβολής με εστίες E και E' .
 (2.3=6 μονάδες)
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
1. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ισχύει $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.
 2. Η ευθεία $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0, \mu \varepsilon A, B, \Gamma \in \mathfrak{R}$ και $A \cdot B > 0$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.
 3. Η παραβολή $c: y^2 = px$ έχει εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{4}, 0\right)$.
 4. Αν οι ελλείψεις $c_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} = 1$ και $c_2: \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{\beta_2^2} = 1$ είναι όμοιες τότε $a_1 = a_2$ και $\beta_1 = \beta_2$.
 5. Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο:
 $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$.
 (5x2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ $|\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

γ. $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

(9 μονάδες)

2. Έστω M μέσο του $B\Gamma$. Να εκφράσετε τα διανύσματα \overrightarrow{AM} και $\overrightarrow{B\Gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(4 μονάδες)

3. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B\Gamma})$

(5 μονάδες)

4. Να βρεθεί το μέτρο της προβολής του \overrightarrow{AM} στο $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με εξισώσεις διαγωνίων $(B\Delta): y=x+1$ και $(A\Gamma): y=2x-3$. Η διαγώνιος $B\Delta$ είναι η μεσοπαράλληλος των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 , των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι $d = 2\sqrt{2}$ και οι οποίες διέρχονται από τις κορυφές A και Γ αντιστοίχως. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = (4, 6)$, τότε:

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(5 μονάδες)

2. Να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν εξισώσεις $(\epsilon_1): x-y-1=0$ και $(\epsilon_2): x-y+3=0$.

(8 μονάδες)

3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ, Δ του παραλληλογράμμου.

(8 μονάδες)

4. Να βρείτε το εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)$ του παραλληλογράμμου.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $C : x^2 + y^2 - 2(\eta\mu\theta)x + 4(\sigma\upsilon\nu\theta)y + \eta\mu^2\theta = 0$, (1) με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να δείξετε ότι:

1. Η εξίσωση (1) παριστάνει για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο $K(x_0, y_0)$ και την ακτίνα ρ ως συνάρτηση της γωνίας θ .
(6 μονάδες)
2. Τα κέντρα των κύκλων $K(x_0, y_0)$ που προκύπτουν από την (1), ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε τα μήκη του μεγάλου $A'A$ και μικρού $B'B$ άξονα της, τις εστίες της E', E καθώς και την εκκεντρότητα της ϵ .
(9 μονάδες)
3. Για τις συνεταγμένες των κέντρων $K(x_0, y_0)$ των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ισχύουν : $x_0 > 0, y_0 < 0$ και στην συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $K(x_0, y_0)$.
(4 μονάδες)
4. Η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση, της εστίας E (με θετική συνεταγμένη) από τυχαίο σημείο του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την (1) για $\theta = \frac{\pi}{3}$, είναι $d_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $d_2 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, αντιστοίχως.
(6 μονάδες)