Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α.1. Θεωρία σελ. 68

Α.2. Θεωρία σελ. 61
Θεωρία σελ. 62

Β.1.
1. Σ
2. Λ
3. Σ
4. Λ
5. Σ

Β.2. Γ

Β.3. Δ

Β.4.
Α. 3
Β. 4
Γ. 1
Δ. 2

ΘΕΜΑ 2^{o}

α) Επειδή ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου έχουμε:

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 84\alpha-12+4\beta+2-2\alpha=0 \Leftrightarrow -6\alpha+4\beta-2=0 \Leftrightarrow 3\alpha-2\beta+1=0$$
(1)

Επειδή η διαίρεση του P(x) με το x+1 αφήνει υπόλοιπο -18 έχουμε

$$P(-1)=-18 \Leftrightarrow -1-\alpha-3-2\beta-1-2\alpha=-18 \Leftrightarrow -3\alpha-2\beta+13=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta-13=0 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

(1)+(2) $\Rightarrow 6\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$

για α=2 (1) $\Rightarrow 6 - 2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{2}$

β) **i)** Για α=2 και $\beta = \frac{7}{2}$ το πολυώνυμο γίνεται

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

Με σχήμα Horner έχουμε

1	-5	8	4	2
	2	-6	4	
1	-3	2	0	

Το πολυώνυμο γράφεται

$$P(x) = (x-2)\left(x^2 - 3x + 2\right) = (x-2)(x-2)(x-1) = (x-2)^2(x-1)$$

Άρα $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$ διπλή ρίζα.

ii) Η διαίρεση είναι:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} x^3 \qquad -x & x - 5 \\ \cline{1-1} -5x^2 + 7x - 4 & \\ 5x^2 \qquad +5 & \\ \cline{1-1} 7x + 1 & \end{array}$$

Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε

$$P(x) = (x-5)\left(x^2 + 1\right) + 7x + 1$$

γ) Η ανίσωση γίνεται:

$$P(x) \geq 7x + 1 \Leftrightarrow (x-5)\left(x^2+1\right) + 7x + 1 \geq 7x + 1 \Leftrightarrow (x-5)\left(x^2+1\right) \geq 0 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Α. **α)** Η εξίσωση γίνεται

$$f(2x) + 3f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

Θέτω συνx=ω με $-1 \leq \omega \leq 1$ και η εξίσωση γίνεται

$2\omega^2 + 3\omega + 1 = 0$ που έχει ρίζες $\omega = -1$ και $\omega = -\frac{1}{2}$ δεκτές

Για ω=-1 έχουμε $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi$, $\kappa \in Z$

Για $\omega=-\frac{1}{2}$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $\kappa\in Z$

β) Για $x=\frac{\pi}{3}$ έχουμε $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ οπότε η δοθείσα σχέση γίνεται

$$L=\left[1+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+...+f^{10}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]2^{10}-38=$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]2^{10}-38=\Sigma_{11}\cdot 2^{10}-38$$

όπου Σ_{11} το άθροισμα 11 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1=1$ και λόγο $\lambda=\frac{1}{2}$

άρα $\Sigma_{11}=\alpha_1\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{1}{2^{11}}-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{1-}{-2^{10}}=\frac{2^{11}-1}{2^{10}}$ οπότε

$$L=\frac{2^{11}-1}{2^{10}}\cdot 2^{10}-38=2^{11}-39=2009.$$

Β. **α)** Πρέπει $1-2\alpha>0\Leftrightarrow \alpha<\frac{1}{2}$.

Για να είναι γνησίως φθίνουσα η g πρέπει

$$0<1-2\alpha<1\Leftrightarrow -1<-2\alpha<0\Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2}$$

Επομένως για να είναι γνησίως φθίνουσα η g πρέπει $0<\alpha<\frac{1}{2}$

β) Για α=-1 η συνάρτηση γίνεται $g(x)=3^x$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$g\left(\eta\mu^2 x\right)+g\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x}+3^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x}+3^{1-\eta\mu^2 x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x}+\frac{3}{3^{\eta\mu^2 x}}=2\sqrt{3}$$

Θέτουμε $3^{\eta\mu^2 x}=\omega$, $\omega>0$ και έχουμε

$$\omega+\frac{3}{\omega}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \omega^2-2\sqrt{3}\omega+3=0\Leftrightarrow\left(\omega-\sqrt{3}\right)^2=0$$

Έτσι $\omega=\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{\eta\mu^2 x}=(3)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow \eta\mu^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\eta\mu x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{4} , \kappa\in Z$$

$$\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} , \kappa\in Z$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Πρέπει x>0 και $2\ln x-1\neq 0 \Leftrightarrow \ln x\neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x\neq \sqrt{e}$

Άρα $A_f=\left(0,\sqrt{e}\right)\cup\left(\sqrt{e},+\infty\right)$.

Για το σημείο τομής της γ.π. της f με τον x΄x έχουμε

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x+1}{2\ln x-1}=0 \Leftrightarrow 2\ln x+1=0 \Leftrightarrow$$

$2\ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$ άρα το σημείο τομής είναι $\left(e^{-\frac{1}{2}},0\right)$.

β) Έχουμε

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2\ln\frac{1}{x}+1}{2\ln\frac{1}{x}-1}=\frac{-2\ln x+1}{-2\ln x-1}=\frac{2\ln x-1}{2\ln x+1}=\frac{1}{f(x)}$$ για κάθε $x\in A_f$ και $x\neq e^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Η εξίσωση γίνεται

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3 \Leftrightarrow f(x)+\frac{2}{f(x)}=3 \Leftrightarrow f^2(x)-3f(x)+2=0$$

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει ρίζες f(x)=1 και f(x)=2

Αν $f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{2\ln x+1}{2\ln x-1}=1 \Leftrightarrow 2\ln x+1=2\ln x-1 \Leftrightarrow 1=-1$ αδύνατο.

Αν $f(x)=2 \Leftrightarrow \frac{2\ln x+1}{2\ln x-1}=2 \Leftrightarrow 2\ln x+1=4\ln x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln x=3 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$ δεκτή.

δ) Παρατηρούμε ότι $f\left(e^x\right)=\frac{2\ln e^x+1}{2\ln e^x-1}=\frac{2x+1}{2x-1}$

Άρα η τιμή της παράστασης

$A=\ln f(e^{1000})+\ln f\left(e^{1001}\right)+\ln f\left(e^{1002}\right)+\ln f\left(e^{1003}\right)+\ln f\left(e^{1004}\right)$ είναι

$$A=\ln\left[f(e^{1000})\cdot f\left(e^{1001}\right)\cdot f\left(e^{1002}\right)\cdot f\left(e^{1003}\right)\cdot f\left(e^{1004}\right)\right]=$$

$$=\ln\left[\frac{2001}{1999}\cdot\frac{2003}{2001}\cdot\frac{2005}{2003}\cdot\frac{2007}{2005}\cdot\frac{2009}{2007}\right]=\ln\frac{2009}{1999}=\ln 2009-\ln 1999$$