



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. α.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 61.
β. Σχολικό βιβλίο σελίδες 60,61.
B. α. (Σ), **β.** (Σ), **γ.** (Λ), **δ.** (Σ), **ε.** (Λ).

ΘΕΜΑ 2^ο

- α. i)** Έστω ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. Τότε $\overline{AB} \parallel \overline{B\Gamma}$, οπότε $\det(\overline{AB}, \overline{B\Gamma}) = 0$.
 Αλλά $\overline{AB} = (4-2, 5-0) = (2, 5)$ και $\overline{B\Gamma} = (6-4, \kappa-5) = (2, \kappa-5)$.
 Άρα $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & \kappa-5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(\kappa-5) - 5 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 2\kappa - 10 - 10 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 10$, που είναι άτοπο αφού $\kappa \neq 10$. Συνεπώς τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά.
- ii)** Αν M το μέσο της AΓ, τότε $M\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+\kappa}{2}\right) = \left(4, \frac{\kappa}{2}\right)$. Η ευθεία που διέρχεται από το B(4, 5) και το $M\left(4, \frac{\kappa}{2}\right)$ είναι προφανώς η (ε) : $x = 4$.
- β.** Από υπόθεση: $(AB\Gamma) = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})| = 8$ (1)
 Αλλά $\overline{AB} = (2, 5)$ και $\overline{A\Gamma} = (6-2, \kappa-0) = (4, \kappa)$, οπότε η (1) ισοδύναμα γράφεται:
 $\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & \kappa \end{vmatrix} \right| = 8 \Leftrightarrow |2\kappa - 20| = 16 \Leftrightarrow 2\kappa - 20 = 16 \text{ ή } 2\kappa - 20 = -16 \Leftrightarrow \kappa = 18 \text{ ή } \kappa = 2$,
 άρα Γ(6,18) ή Γ(6,2).

γ. Για $\kappa = 2$ είναι $\Gamma(6,2)$

Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας (η) (εξίσωση ύψους):

$$\lambda_{\text{BG}} = \frac{2-5}{6-4} = -\frac{3}{2} \text{ άρα } \lambda_{(\eta)} = \frac{2}{3} \text{ (αφού } \lambda_{(\eta)} \lambda_{\text{BG}} = -1)$$

και επειδή η (η) διέρχεται από το $A(2, 0)$ έχουμε:

$$\psi - 0 = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow \psi = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \text{ που είναι η εξίσωση της (η).}$$

Για την εύρεση του σημείου Δ: λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε), (η). Έτσι:

$$\begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \psi = \frac{4}{3} \end{cases}, \text{ άρα } \Delta\left(4, \frac{4}{3}\right).$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται: $(3-\mu)x^2 + (\mu+2)\psi^2 = (\mu+2)(3-\mu)$ και για να παριστάνει κύκλο, πρέπει (αρχικά) να ισχύει: $3-\mu = \mu+2$ δηλ. $\mu = \frac{1}{2}$. Η

προηγούμενη εξίσωση για $\mu = \frac{1}{2}$, γίνεται:

$$\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}\psi^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = \frac{5}{2},$$

που είναι εξίσωση κύκλου κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Επομένως $\mu = \frac{1}{2}$.

β. Για να παριστάνει έλλειψη η εξίσωση (1), θα πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{cases} \mu+2 > 0 \\ 3-\mu > 0 \\ \mu+2 \neq 3-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > -2 \\ \mu < 3 \\ \mu \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < \mu < 3 \text{ και } \mu \neq \frac{1}{2}, \text{ άρα } \mu \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right).$$

γ. Για $\mu \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

i) Είναι: $-2 < \mu < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \mu + 2 < 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \mu + 2 < \frac{5}{2}$ (2)

και $-2 < \mu < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 > -\mu > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\mu < 2 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2} < 3 - \mu < 5$
 $\Leftrightarrow \frac{5}{2} < 3 - \mu < 5$ (3).

Από (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι $3 - \mu > \mu + 2$, οπότε $\alpha^2 = 3 - \mu$ και $\beta^2 = \mu + 2$, δηλαδή η έλλειψη έχει τη μορφή $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{\psi^2}{\alpha^2} = 1$, επομένως οι εστίες της βρίσκονται πάνω στον άξονα $\psi\psi$.

ii) Έχουμε $\alpha^2 = 3 - \mu$, $\beta^2 = \mu + 2$ άρα $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (3 - \mu) - (\mu + 2) = 1 - 2\mu$.

Για την εκκεντρότητα ε της έλλειψης ισχύει:

$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{1 - 2\mu}{3 - \mu} \Leftrightarrow 4 - 8\mu = 9 - 3\mu \Leftrightarrow \mu = -1$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Για $A(-1, \psi)$ και $B(2x, \psi)$ με $O(0, 0)$ έχουμε $\overline{OA} = (-1, \psi)$ και $\overline{OB} = (2x, \psi)$ οπότε:

A. Αφού $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, τότε $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot 2x + \psi \cdot \psi = 0 \Leftrightarrow \psi^2 = 2x$ που είναι εξίσωση παραβολής C_1 με $2p = 2 \Leftrightarrow p = 1$, συνεπώς η εστία είναι το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ή $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα δ είναι η ευθεία με εξίσωση

$$x = -\frac{p}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2}.$$

B. Έχουμε $\overline{OB}^2 + 3\overline{OA}^2 = 15 \Leftrightarrow |\overline{OB}|^2 + 3|\overline{OA}|^2 = 15 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(2x)^2 + \psi^2}^2 + 3\sqrt{(-1)^2 + \psi^2}^2 = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + \psi^2 + 3(1 + \psi^2) = 15, \text{ άρα}$$

$$4x^2 + \psi^2 + 3 + 3\psi^2 = 15 \Leftrightarrow 4x^2 + 4\psi^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 = 3 \text{ που είναι εξίσωση κύκλου } C_2, \text{ με κέντρο } O(0, 0) \text{ και ακτίνα } R = \sqrt{3}.$$

Γ. α) Για τα κοινά σημεία των C_1, C_2 λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \psi^2 = 2x \\ x^2 + \psi^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2 = 2x \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \psi^2 = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -3 \\ \psi^2 = -6 \end{cases}$$

που είναι αδύνατο, επομένως έχουμε: $\begin{cases} x = 1 \\ \psi = \sqrt{2} \text{ ή } \psi = -\sqrt{2} \end{cases}$. Άρα τα

κοινά σημεία των C_1, C_2 είναι το $K(1, \sqrt{2})$ και το $\Lambda(1, -\sqrt{2})$.

β) Η εφαπτομένη της C_1 στο $K(1, \sqrt{2})$ έχει εξίσωση:

$$\psi\psi_1 = \rho(x + x_1) \text{ ή } \psi\sqrt{2} = 1(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\psi = x+1 \Leftrightarrow \psi = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1).$$

Η εφαπτομένη του C_2 στο $\Lambda(1, -\sqrt{2})$ έχει εξίσωση:

$$xx_2 + \psi\psi_2 = 3 \text{ ή } x + \psi(-\sqrt{2}) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}\psi = x-3 \Leftrightarrow \psi = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2).$$

Οι ευθείες που παριστάνουν οι (1), (2) έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης ($\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$), άρα οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες.