

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

A. Θεωρία

B.

- i) Λάθος αφού για την ευθεία $x=0$, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.
- ii) Λάθος το διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$ είναι κάθετο στην ευθεία ε .
- iii) Σωστό $\gamma \parallel [(a+\beta) - a]$ άρα $\gamma \parallel \beta$.

Γ. Θεωρία

Θέμα 2ο

i) Είναι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{πρόβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \frac{5}{8} \vec{a} = \frac{5}{8} \vec{a}^2 = \frac{5}{8} \cdot 4^2 = 10$

ii) Έστω $\varphi = (\vec{a}, \vec{\beta})$. Έχουμε $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{10}{4 \cdot 5} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2}$, άρα $\varphi = 60^\circ$.

iii) $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 = (\vec{a} - \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{a}\vec{\beta} = |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{a}\vec{\beta} = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 = 21$,
επομένως $|\vec{u}| = \sqrt{21}$.

iv) $\vec{\beta} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot [(\vec{a} \cdot \vec{\beta})\vec{a} - \kappa \cdot \vec{\beta}] = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot (10\vec{a} - \kappa\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$
 $10\vec{a}\vec{\beta} - \kappa\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot 10 - \kappa \cdot 5^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa \cdot 5^2 = 100 \Leftrightarrow \kappa = 4$.

Θέμα 3ο

- i) $\alpha = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα α περιττός. Έτσι $\alpha^2 = 8\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$
 $\beta = \kappa^2 + \kappa = \kappa(\kappa + 1) = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}$ (γινόμενο διαδοχικών ακεραίων)
 Άρα $\alpha^2 + \beta = 8\lambda + 1 + 2\mu = 2(4\lambda + \mu) + 1 = 2\nu + 1$, $\nu = 4\lambda + \mu \in \mathbb{Z}$,
 δηλαδή $\alpha^2 + \beta$ περιττός.
- ii) Το τετράγωνο περιττού ακεραίου είναι της μορφής $8\gamma + 1$, $\gamma \in \mathbb{Z}$
 Άρα $\frac{(\alpha^2 + \beta)^2 + 31}{8} = \frac{8\gamma + 1 + 31}{8} = \frac{8(\gamma + 4)}{8} = \gamma + 4 \in \mathbb{Z}$.
- iii) $\alpha + \beta = 2\kappa + 1 + \kappa^2 + \kappa = \kappa^2 + 3\kappa + 1$ και αφού $\kappa = 3\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ τότε
 $\alpha + \beta = (3\lambda + 1)^2 + 3(3\lambda + 1) + 1 = 6\lambda^2 + 15\lambda + 3 + 2 = 3(2\lambda^2 + 5\lambda + 1) + 2$ με
 $(2\lambda^2 + 5\lambda + 1) \in \mathbb{Z}$, άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\alpha + \beta$ με το 3
 είναι 2.

Θέμα 4ο

- i) Οι εφαπτομένες της υπερβολής στις κορυφές της A' και A είναι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x = -a$ και $(\varepsilon_2): x = a$ αντίστοιχα.

Η εξίσωση της ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda > 0$, που διέρχεται από το σημείο $K(\theta, \beta)$ είναι η

$$(\varepsilon): y - \beta = \lambda(x - \theta) \Leftrightarrow y = \lambda x + \beta.$$

$$\left. \begin{array}{l} (\varepsilon_1): x = -a \\ (\varepsilon): y = \lambda x + \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -a \\ y = -a\lambda + \beta \end{array} \right\} \text{ άρα } M(-a, -a\lambda + \beta).$$

$$\left. \begin{array}{l} (\varepsilon_2): x = a \\ (\varepsilon): y = \lambda x + \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = a \\ y = a\lambda + \beta \end{array} \right\} \text{ άρα } P(a, a\lambda + \beta).$$

- ii) Οι συντεταγμένες του μέσου του MP , δηλαδή του κέντρου του

$$\text{κύκλου είναι } \left(\frac{-a + a}{2}, \frac{-a\lambda + \beta + a\lambda + \beta}{2} \right) = (\theta, \beta).$$

$$\text{Επίσης } (MP) = \sqrt{(a+a)^2 + (a\lambda + \beta - a\lambda + \beta)^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2\lambda^2} = 2a\sqrt{1+\lambda^2},$$

άρα η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = \frac{(MP)}{2} = a\sqrt{1+\lambda^2}$ και η εξίσωσή

$$\text{του: } x^2 + (y - \beta)^2 = a^2(1 + \lambda^2).$$

iii) Έχουμε

$$\rho = A'A \Leftrightarrow a\sqrt{1+\lambda^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{1+\lambda^2} = 2 \Leftrightarrow 1+\lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{3}.$$

iv) Ο κύκλος $x^2 + (y-\beta)^2 = a^2(1+\lambda^2)$ διέρχεται από την εστία $E(\gamma, \theta)$ αν και μόνο αν $\gamma^2 + (\theta-\beta)^2 = a^2(1+\lambda^2)$ δηλαδή

$$\gamma^2 + \beta^2 = a^2 + a^2\lambda^2 \Leftrightarrow \gamma^2 + \gamma^2 - a^2 = a^2 + a^2\lambda^2 \Leftrightarrow a^2\lambda^2 = 2\gamma^2 - 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = 2\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2 - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2\varepsilon^2 - 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2\varepsilon^2 - 2}.$$