

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

Θέματα Άλγεβρας Β' Λυκείου Γενικής Παιδείας

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

Α. Απαντήστε (χωρίς αιτιολόγηση) στα επόμενα ερωτήματα.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2004 \cdot \sin(4x)$. Γράψτε τη μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης. (3 μονάδες)

2. Αν α, β δύο ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί, ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο των α, β τον αριθμό

- $\frac{\alpha + \beta}{2}$
- $\alpha\beta$
- $\pm\sqrt{\alpha\beta}$
- $\sqrt{\alpha\beta}$

(3 μονάδες)

3. Συμπληρώστε σωστά την επόμενη πρόταση: Το σημείο τομής της ευθείας $y = e^2$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ είναι

(3 μονάδες)

4. Είναι σωστός ή λάθος, ο ισχυρισμός ότι «το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολωνύμου $P(x)$ με το x , είναι ο αριθμός $P(0)$ ». (3 μονάδες)

Β. Έστω α, κ , δύο πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και $\kappa > 0$.

1. Τι ονομάζουμε «λογάριθμο του κ ως προς βάση α »;

(1 μονάδα)

2. Δείξτε ότι $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$

(2 μονάδες)

Γ. Δίνεται η πολωνομική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος αριθμός $\kappa \neq 0$ είναι λύση της εξίσωσης, να δείξετε ότι το κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 . Ισχύει το αντίστροφο; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

(7 μονάδες)

Δ. Να συγκριθούν οι θετικοί αριθμοί x, y , αν είναι γνωστό ότι, για $a \in (1, +\infty)$, ισχύει

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\ln x} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\ln y}.$$

(3 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο

Α. Αν $A = \frac{1 - \eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2}$ Να δείξετε ότι $A=1$.

(10 μονάδες)

Β. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $x \in [0, \pi]$ για τους οποίους:

$$2\eta\mu^3 x - 4\eta\mu \frac{x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$$

(15 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (a+1)x^3 + bx^2 - bx + a$, με $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, για το οποίο είναι γνωστό ότι έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ και ρίζα το 2.

1. Βρείτε τους αριθμούς a, b (11 μονάδες)
2. Αν $a=6, b=17$ και x_1, x_2, x_3 οι ρίζες του $P(x)$ με $x_1 < x_2 < x_3$, δείξτε ότι οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 , με τη σειρά που αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί $e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}$, επίσης με τη σειρά που αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. (6 μονάδες)
3. Να βρεθούν τρεις αριθμοί $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ενδιάμεσοι των e^{x_1} και e^{x_2} ώστε και οι πέντε να αποτελούν διαδοχικούς όρους της ίδιας Γεωμετρικής Προόδου. (8 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ 4^ο

Έστω x, y θετικοί αριθμοί, με $x \neq 1$.

1. Δείξτε ότι ισχύει: $\ln y \cdot \log x = \log y \cdot \ln x$ (5 μονάδες)
2. Αν ισχύει η ισότητα $\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 4 \frac{\log y}{\log x} + 4 = 0$ βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x, y . (8 μονάδες)
3. Αν είναι $y = x^2$ και το y είναι λύση της εξίσωσης $e^{2y^2-3y+1} = (2004)^0$, να βρείτε τους αριθμούς x, y (5 μονάδες)
4. Αν για το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 4x + 4$ ισχύει $P(\ln x) \leq 1$, να δείξετε ότι $y \in [e^2, e^6]$ (7 μονάδες)