

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ-ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία, σελίδα 32

Β. Θεωρία, σελίδα 147 ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (iv)

Γ. $\Sigma - \Lambda - \Sigma - \Lambda - \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Επαγωγή. Για $v = 2$ η σχέση προφανώς ισχύει.

Αν $2^v > 3v - 5$ (2), με $v \geq 2$, θα δείξουμε ότι

$$2^{v+1} > 3(v+1) - 5 \Leftrightarrow 2^{v+1} > 3v - 2 \quad (3)$$

Η (3) ισχύει για $v = 2$.

Για $v \geq 3$ είναι

$$2^{v+1} = 2 \cdot 2^v \stackrel{(2)}{>} 2 \cdot (3v - 5) = 6v - 10,$$

επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$6v - 10 > 3v - 2 \Leftrightarrow v > 8/3, \text{ που ισχύει.}$$

Β. Για $v = 1$ η (1) γίνεται $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ και παριστάνει ισοσκελή υπερβολή με a

$= b = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Οι εστίες είναι $E'(-2, 0)$, $E(2, 0)$, η

εκκεντρότητα ισούται με $\sqrt{2}$ και οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $y = \pm x$.

Γ. Είναι $v \geq 2$. Η (1) γράφεται

$$\frac{x^2}{2^v} + \frac{y^2}{3v-5} = 1$$

και επειδή $3v - 5 > 0$ και $2^v > 3v - 5$ παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα των x .

ΘΕΜΑ 3ο

A.

- (i) Είναι $(MA) < 2 \Leftrightarrow \dots \alpha^2 + (\beta - 1)^2 < 4$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.
- (ii) Η απόσταση του K από την $x = 2$ ισούται με την ακτίνα $\rho = 2$, έτσι η $x = 2$ εφάπτεται στον κύκλο.

B.

- (i) Η (1) γράφεται: $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - 2\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$ (2) με $\lambda \in \mathbb{R}$..
και παριστάνει ευθεία γιατί οι συντελεστές της $A = \lambda^2 - 1$, $B = 2\lambda$ δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα.
- (ii) Το N δεν ανήκει σε ευθεία με εξίσωση της μορφής (1), αν και μόνον αν, η εξίσωση
- $$\lambda^2(x_0 - 2) + 2\lambda(y_0 - 1) - x_0 - 2 = 0 \quad (3)$$
- είναι αδύνατη, ως προς λ . Επειδή $x_0 \neq 2$ η (3) είναι δευτέρου βαθμού, επομένως πρέπει και αρκεί να έχει αρνητική διακρίνουσα: $\Delta < 0 \Leftrightarrow \dots x_0^2 + (y_0 - 1)^2 < 4$

Άρα, ο ζητούμενος γ. τ. είναι το εσωτερικό του κύκλου C.

ΘΕΜΑ 4ο

$$\text{Είναι } |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OG}| = 1$$

- (i) Με σημείο αναφοράς το O η ισότητα $2\vec{OA} = 4\vec{BG} + \vec{AG}$ δίνει διαδοχικά
 $2\vec{OA} = 4(\vec{OG} - \vec{OB}) + \vec{OG} - \vec{OA} \Leftrightarrow \dots 3\vec{OA} + 4\vec{OB} = 5\vec{OG}$
- (ii) Υψώνουμε στο τετράγωνο την $3\vec{OA} + 4\vec{OB} = 5\vec{OG}$ και μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB}$
- (iii) $\sin(\angle \vec{OA}, \vec{OG}) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OG}}{|\vec{OA}| |\vec{OG}|} = \vec{OA} \cdot \vec{OG} = \vec{OA} \cdot \frac{3\vec{OA} + 4\vec{OB}}{5} = \dots = \frac{3}{5}$
- (iv) Για το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου OAB έχουμε τις σχέσεις
 $E = \frac{1}{2} |\det(\vec{OA}, \vec{OB})|$ και $E = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| = \frac{1}{2}$,
οπότε $\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = \pm 1$.