

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (\text{μονάδες } 5)$$

Β. Έστω α, β, γ ακέραιοι με $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε την ιδιότητα:

$$\text{Αν } \alpha \mid \beta \text{ και } \alpha \mid \gamma, \text{ τότε } \alpha \mid (\beta + \gamma) \quad (\text{μονάδες } 5)$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , είναι: $y - y_0 = \lambda (x - x_0)$. (μονάδες 3)
2. Η ισότητα $-23 = 6 \cdot (-3) - 5$ εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης $(-23) : 6$. (μονάδες 3)
3. Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (\text{μονάδες } 3)$$

4. Η εφαπτόμενη της παραβολής $y^2 = 2px$ ($p \neq 0$) στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $yy_1 = 2p(x + x_1)$. (μονάδες 3)
5. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι παράλληλα, τότε

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \quad (\text{μονάδες } 3)$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω n θετικός ακέραιος.

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 2$ είναι $2^n > 3n - 5$. (μονάδες 10)

Β. Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{x^2}{2^n} - \frac{y^2}{5 - 3n} = 1 \quad (1)$$

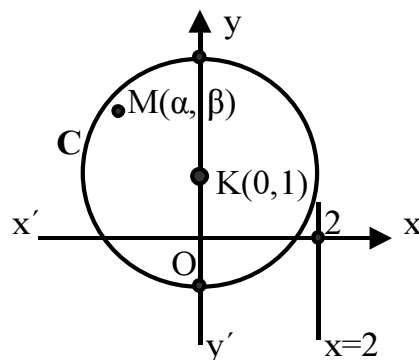
Να αποδείξετε ότι:

1. Για $n = 1$ η εξίσωση (1) παριστάνει ισοσκελή υπερβολή. Να βρείτε τις εστίες της και να γράψετε την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της. (μονάδες 8)

2. Για κάθε $v \geq 2$ η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη που οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα $x'x$.
(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο κύκλος C του σχήματος έχει κέντρο το σημείο $K(0, 1)$ και ακτίνα $\rho = 2$. Το σημείο $M(\alpha, \beta)$ είναι εσωτερικό του C .



A. Να αποδείξετε ότι

- (i) Οι συντεταγμένες του σημείου $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύουν την σχέση: $x^2 + (y - 1)^2 < 4$. (μονάδες 3)
(ii) Η ευθεία $x = 2$, αν προεκταθεί, εφάπτεται στον κύκλο C . (μονάδες 4)

B. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda^2 (x - 2) + 2\lambda (y - 1) - x - 2 = 0 \quad (1), \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία. (μονάδες 6)
(ii) Θεωρούμε τα σημεία $N(x_0, y_0)$ με $x_0 \neq 2$, τα οποία δεν ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση της μορφής (1). Να βρείτε το γεωμετρικό τους τόπο. (μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τρία σημεία A, B, Γ του μοναδιαίου κύκλου, για τα οποία υπάρχει η ισότητα:

$$2\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{A\Gamma}$$

Να αποδείξετε ότι:

- (i) Για τις διανυσματικές ακτίνες των A, B, Γ ισχύει η σχέση

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{O\Gamma} \quad (\text{μονάδες } 5)$$

- (ii) Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα. (μονάδες 8)

- (iii) Για την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}$ είναι:

$$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) = \frac{3}{5} \quad (\text{μονάδες } 5)$$

- (iv) Αν $\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, τότε

$$\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm 1 \quad (\text{μονάδες } 7)$$