

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

A. 1.

1. **Θεωρία:** Σχολ. Βιβλίο σελ. 136, **Απόδειξη 1.**

2. **Θεωρία:** Σχολ. Βιβλίο σελ. 136, **Απόδειξη 3.**

B. 1.

1. → δ.

2. → α.

3. → β.

4. → ε.

5. → γ.

A. 2.

α) : Λανθασμένη

β) : Σωστή

γ) : Λανθασμένη

B. 2.

γ. ορθογώνιο

ΘΕΜΑ 2

α) Βρίσκουμε τις τιμές του λ , που μηδενίζουν τους συντελεστές του x και το σταθερό όρο του πολυωνύμου. Έχουμε: $\lambda^3 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$.

Άρα: $\lambda = -2$ ή $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$. Όμοια: $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0$. Άρα: $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$.

Τέλος: $-\lambda + 2 = 0$. Άρα: $\lambda = 2$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Αν $\lambda \neq -2$ ή $\lambda \neq 0$ ή $\lambda \neq 2$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι **3^{ον} βαθμού**.

ii. Αν $\lambda = -2$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι **1^{ον} βαθμού**. ($P(x) = 8x + 4$).

iii. Αν $\lambda = 0$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι **μηδενικού βαθμού**. ($P(x) = 2$).

iv. Αν $\lambda = 2$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ($P(x) = 0$) και **δεν ορίζεται βαθμός**.

β) Για $\lambda = 1$ έχουμε:

$$P(x) = (1^3 - 4 \cdot 1)x^3 + (1^2 - 2 \cdot 1)x - 1 + 2 \Leftrightarrow P(x) = -3x^3 - x + 1.$$

Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης P από το σημείο $(1, -3)$, θα πρέπει: $P(1) = -3$.

$$\text{Έχουμε: } P(1) = -3 \cdot 1^3 - 1 + 1 \Leftrightarrow P(1) = -3.$$

$$\gamma) P(x) < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 1 < -3 \Leftrightarrow -3x^3 - x + 4 < 0.$$

Παραγοντοποιούμε την τριτοβάθμια χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner:

-3	0	-1	4	1
	-3	-3	-4	
-3	-3	-4	0	

Άρα η τριτοβάθμια γράφεται:

$$(x - 1)(-3x^2 - 3x - 4) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 + 3x + 4) > 0$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική, ($\Delta = 9 - 48 = -39$), άρα το τριώνυμο είναι για κάθε x ομόσημο του a ($a = 3$), δηλαδή είναι για κάθε x θετικό.
Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

	x	$-\infty$	1	$+\infty$
☐	$x - 1$	$-$	$+$	
	$3x^2 + 3x + 4$	$+$	$+$	
☐	Γινόμενο	$-$	$+$	

Άρα: $x > 1$.

ΘΕΜΑ 3

A.

1. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5^{\log x} = x^{\log 5} \Leftrightarrow \log 5^{\log x} = \log x^{\log 5} \Leftrightarrow \log x \log 5 = \log 5 \log x.$$

2. Για κάθε $x, y > 0$ έχουμε: $f(x \cdot y) = 5^{\log(xy)} = 5^{\log x + \log y} = 5^{\log x} \cdot 5^{\log y} = f(x) \cdot f(y).$

3. Για κάθε $x, y > 0$ έχουμε: $f\left(\frac{x}{y}\right) = 5^{\log \frac{x}{y}} = 5^{\log x - \log y} = \frac{5^{\log x}}{5^{\log y}} = \frac{f(x)}{f(y)}.$

4. Για κάθε $v \in \mathbb{N}$ έχουμε: $f(x^v) = 5^{\log x^v} = 5^{v \cdot \log x} = (5^{\log x})^v = [f(x)]^v.$

B.

$f^2(x) = 5 + 4 \cdot g(x) \Leftrightarrow (5^{\log x})^2 = 5 + 4x^{\log 5}$. Από το A.1. η προηγούμενη σχέση

γράφεται: $(5^{\log x})^2 = 5 + 4 \cdot 5^{\log x}$. Θέτουμε: $5^{\log x} = \omega$. Άρα: $\omega^2 - 4\omega - 5 = 0$.

($\Delta = 16 + 20 = 36$ και $\omega = \frac{4 \pm 6}{2}$). Άρα οι λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι το 5 και το -1. (Η λύση -1 απορρίπτεται, γιατί $5^{\log x} > 0$).

Έχουμε: $5^{\log x} = 5$. Η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1, άρα: $\log x = 1 \Leftrightarrow \log x = \log 10$

Η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1, άρα τελικά: $x = 10$.

Γ. Πρέπει: $x > 0$ και $x^2 - 4 > 0$. Άρα: $x > 0$ και $x < -2$ ή $x > 2$. Επομένως: $x > 2$.

$$f(3x) > f(x^2 - 4) \Leftrightarrow 5^{\log 3x} > 5^{\log(x^2 - 4)}.$$

Η εκθετική συνάρτηση με βάση 5 είναι γνησίως αύξουσα, άρα:

$\log 3x > \log(x^2 - 4)$. Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση 10 είναι γνησίως αύξουσα, άρα: $3x > x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$.

($\Delta = 9 + 16 = 25$ και $x = \frac{3 \pm 5}{2}$). Άρα οι λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι το -1 και το 4 και το

τριώνυμο είναι εντός των ριζών του ετερόσημο του a ($a = 1$), δηλαδή είναι αρνητικό, άρα: $-1 < x < 4$.

Επειδή $x > 2$, τελικά έχουμε: $2 < x < 4$.

ΘΕΜΑ 4

A.

1. Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, με $\alpha_1 = \ln e$, $\alpha_4 = \ln 8 + 1$ έχουμε $\alpha_4 = \alpha_1 + (4-1)\omega \Leftrightarrow \ln 8 + 1 = \ln e + 3\omega \Leftrightarrow \ln 2^3 + 1 = 1 + 3\omega \Leftrightarrow 3 \ln 2 = 3\omega$.

Άρα: $\omega = \ln 2$.

2. Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$, με $\alpha_1 = \ln e$ και αντικαθιστώντας από το Α.1.

όπου $\omega = \ln 2$, έχουμε:

$$S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega] \Leftrightarrow S_v = \frac{v}{2}[2\ln e + (v-1)\ln 2] \Leftrightarrow S_v = \frac{v}{2}[2 \cdot 1 + (v-1)\ln 2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_v = v + \frac{v(v-1)}{2}\ln 2 \Leftrightarrow S_v = v + \ln 2^{\frac{v(v-1)}{2}}.$$

3. Αντικαθιστώντας το S_v από τον τύπο του Α.2., έχουμε:

$$v + \frac{1}{2}\ln 2^{v^3-21} = v + \ln 2^{\frac{v(v-1)}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2^{v^3-21} = \ln 2^{\frac{v(v-1)}{2}} \Leftrightarrow \ln(2^{v^3-21})^{\frac{1}{2}} = \ln 2^{\frac{v(v-1)}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln 2^{\frac{v^3-21}{2}} = \ln 2^{\frac{v(v-1)}{2}} * \Leftrightarrow \frac{v^3-21}{2} = \frac{v(v-1)}{2} \Leftrightarrow v^3 - 21 = v^2 - v \Leftrightarrow v^3 - v^2 + v - 21 = 0.$$

* (Η συνάρτηση $\ln$ είναι 1-1).

Λύνουμε την τριτοβάθμια με τη βοήθεια του σχήματος Horner:

1	-1	1	-21	3
	3	6	21	
1	2	7	0	

Άρα η τριτοβάθμια γράφεται: $(v-3)(v^2 + 2v + 7) = 0 \Leftrightarrow v = 3$ ή $v^2 + 2v + 7 = 0$.

Η $v^2 + 2v + 7 = 0$ είναι αδύνατη, γιατί η διακρίνουσά της είναι αρνητική.

($\Delta = 4 - 28 = -24 < 0$). Άρα: $v = 3$.

B.

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο: $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$, με $\alpha_1 = 6$, $\alpha_v = 36$, έχουμε:

$$36 = 6 + (v-1)\omega \Leftrightarrow 36 - 6 = (v-1)\omega \Leftrightarrow 30 = (v-1)\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{30}{v-1} \quad (1).$$

β) Επειδή ισχύει: $\alpha_{v-2} = 2\alpha_4$, έχουμε:

$$6 + (v-3)\omega = 2(6 + 3\omega) \Leftrightarrow 6 + v\omega - 3\omega = 12 + 6\omega \Leftrightarrow v\omega - 9\omega = 6 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} v \frac{30}{v-1} - 9 \frac{30}{v-1} = 6 \Leftrightarrow 30v - 270 = 6(v-1) \Leftrightarrow 30v - 270 = 6v - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24v = 264 \Leftrightarrow v = \frac{264}{24} \Leftrightarrow v = 11.$$

$$\text{Άρα: } v = 11 \quad \omega = \frac{30}{11-1} = \frac{30}{10} = 3.$$