

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 10 Ιανουαρίου 2026

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Σελίδα 63 σχολικού βιβλίου.

Α2. Σωστή απάντηση η (α).

Α3. α) Σωστό.

β) Σωστό.

γ) Λάθος.

δ) Σωστό.

ε) Λάθος.

**ΘΕΜΑ Β**

B1.  $4|2x-1|-12=0 \Leftrightarrow 4|2x-1|=12 \Leftrightarrow |2x-1|=3 \Leftrightarrow$

$2x-1=3 \text{ ή } 2x-1=-3 \Leftrightarrow$

$2x=4 \text{ ή } 2x=-2 \Leftrightarrow$

$x=2 \text{ ή } x=-1.$

B2. α΄ τρόπος:

$(x-3)^2+3(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot [(x-3)+3]=0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot x=0 \Leftrightarrow$

$x-3=0 \text{ ή } x=0 \Leftrightarrow$

$x=3 \text{ ή } x=0.$

β΄ τρόπος:

$(x-3)^2+3(x-3)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+3x-9=0 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow$

$x \cdot (x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$x-3=0 \text{ ή } x=0 \Leftrightarrow$$

$$x=3 \quad \text{ή} \quad x=0.$$

**B3.**  $(1-x)^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow (1-x)^5 = 32 \Leftrightarrow 1-x=2 \Leftrightarrow -x=1 \Leftrightarrow x=-1.$

**B4.**  $\frac{1-x^2}{x^2-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{3}{x-2}$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε  $x$  με:

- $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0$  και  $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$  και  $x \neq -2$
- $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$
- $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1-x^2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x}{x+2} = \frac{3}{x-2} \text{ το ΕΚΠ} = (x-2)(x+2), \text{ άρα}$$

$$(x-2)(x+2) \cdot \frac{1-x^2}{(x-2)(x+2)} + (x-2)(x+2) \cdot \frac{x}{x+2} = (x-2)(x+2) \cdot \frac{3}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$1-x^2 + x \cdot (x-2) = 3 \cdot (x+2) \Leftrightarrow 1-x^2 + x^2 - 2x = 3x + 6 \Leftrightarrow -2x - 3x = 6 - 1 \Leftrightarrow$$

$$-5x = 5 \Leftrightarrow x = -1 \text{ Δεκτή.}$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**  $\kappa = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{3+2+1}{6}} = 3^{\frac{6}{6}} = 3^1 = 3.$

**Γ2.** Η παράσταση  $A = \frac{x^2 - 6|x| + 9}{|x| - \kappa}$  για  $\kappa = 3$  γίνεται:  $A = \frac{x^2 - 6|x| + 9}{|x| - 3}.$

Πρέπει  $|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3$  και  $x \neq -3.$

Οπότε:  $A = \frac{x^2 - 6|x| + 9}{|x| - 3} = \frac{|x|^2 - 6|x| + 9}{|x| - 3} = \frac{(|x| - 3)^2}{|x| - 3} = |x| - 3.$

Γ3. Πρέπει  $4y^2 + 12y + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2y + 3)^2 \geq 0$  που ισχύει για κάθε τιμή του  $y$ .

$$\text{Οπότε: } B = \sqrt{4y^2 + 12y + 9} = \sqrt{(2y + 3)^2} = |2y + 3|.$$

Γ4.  $x \in (2, 5) \Leftrightarrow 2 < x < 5$ .

i) Επειδή  $2 < x < 5$  δηλαδή  $x > 0$  άρα το  $|x| = x$  και η παράσταση  $A = |x| - 3$

γίνεται  $A = x - 3$ .

$-3 < y < -2 \Leftrightarrow -6 < 2y < -4 \Leftrightarrow -3 < 2y + 3 < -1$  δηλαδή  $2y + 3 < 0$  άρα το  $|2y + 3| = -2y - 3$  και η παράσταση  $B = |2y + 3|$  γίνεται  $B = -2y - 3$ .

Τελικά:  $A + B = x - 3 + (-2y - 3) = x - 3 - 2y - 3 = x - 2y - 6$ .

$$\text{ii) } \left. \begin{array}{l} 2 < x < 5 \Leftrightarrow 2 - 6 < x - 6 < 5 - 6 \Leftrightarrow -4 < x - 6 < -1 \\ -3 < y < -2 \Leftrightarrow 6 > -2y > 4 \Leftrightarrow 4 < -2y < 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (+) \\ (-) < 0 \end{array} \Rightarrow 0 < x - 6 - 2y < 5 \Leftrightarrow$$

$0 < A + B < 5$ . Η παράσταση  $A + B$  περιέχεται μεταξύ των αριθμών 0 και 5.

### ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \lambda = \frac{(2 + \sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{4 + 4 \cdot \sqrt{2} + 2 + 4 - 4 \cdot \sqrt{2} + 2}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$\Delta 2. \theta = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{3}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} - 1 = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\theta = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{3}}{3 - 1} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} - 1 = \frac{6 + 2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - 1 = \frac{6}{2} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\theta = 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Δ3. i) Η  $(\kappa^2 - 4\kappa + \theta^2) \cdot x = \kappa^2 - (\lambda - 1)^2$  με  $\lambda = 3$  και  $\theta = 2$  γίνεται:

$$(\kappa^2 - 4\kappa + 2^2) \cdot x = \kappa^2 - (3 - 1)^2 \Leftrightarrow (\kappa^2 - 2 \cdot \kappa \cdot 2 + 2^2) \cdot x = \kappa^2 - 2^2 \Leftrightarrow$$

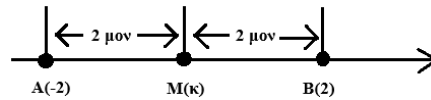
$$(\kappa - 2)^2 \cdot x = (\kappa - 2) \cdot (\kappa + 2).$$

Για  $(\kappa - 2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 2$  η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x_0 = \frac{(\kappa - 2) \cdot (\kappa + 2)}{(\kappa - 2)^2} = \frac{\kappa + 2}{\kappa - 2}.$$

**Δ4.** i)  $|x_0| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\kappa + 2}{\kappa - 2} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\kappa + 2|}{|\kappa - 2|} = 1 \Leftrightarrow |\kappa + 2| = |\kappa - 2| \Leftrightarrow |\kappa - (-2)| = |\kappa - 2|.$

Συμπεραίνουμε ότι  $MA = MB$  δηλαδή το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $AB$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ii) Με την χρήση του άξονα:

Είναι  $(AB) = d(-2, 2) = |-2 - 2| = |-4| = 4$ , επομένως το σημείο  $M$  απέχει 2 μονάδες από το  $A(-2)$  και 2 μονάδες από το σημείο  $B(2)$ , οπότε  $\kappa = 0$ .

Αλγεβρικά:

$$|x_0| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\kappa + 2}{\kappa - 2} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|\kappa + 2|}{|\kappa - 2|} = 1 \Leftrightarrow |\kappa + 2| = |\kappa - 2| \Leftrightarrow$$

$$\kappa + 2 = \kappa - 2 \quad \text{ή} \quad \kappa + 2 = -(\kappa - 2) \Leftrightarrow$$

$$0 = -4 \quad \text{ή} \quad \kappa + 2 = -\kappa + 2 \Leftrightarrow$$

$$\text{Αδύνατη} \quad 2\kappa = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = 0.$$