ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου

Α2 α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ

- $B\hat{\Delta}A = B\hat{\Delta}E = 90°$
- $A\Delta = \Delta E$ (υπόθεση)
- $B\Delta$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΖΓΜ

- $BM = M\Gamma$ (ΑΜ διάμεσος)
- $AM = MZ$ (υπόθεση)
- $A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}Z$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β3. Από την σύγκριση στο ερώτημα Β1 έχουμε ότι $AB = BE$ (1)

Από την σύγκριση στο ερώτημα Β2 έχουμε ότι $AB = \Gamma Z$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $BE = \Gamma Z$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ΓBE

- $AB = B\Gamma$ (υπόθεση)
- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $B\Delta = BE$ (υπόθεση)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Γ2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $AE\Gamma$

- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A$ (από την 1η σύγκριση)
- $A\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Γ3.

<u>1ος Τρόπος</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ το οποίο ισχύει από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2.

<u>2ος Τρόπος</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι: $AM = M\Gamma$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔAM και $E\Gamma M$

- $A\Delta = \Gamma E$ (υπόθεση)
- $A\hat{\Delta}M = \Gamma\hat{E}M$ (από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2)
- $\Delta\hat{A}M = E\hat{\Gamma}M$ (ως διαφορά ίσων γωνιών

$$\begin{array}{r} \Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A \\ -\ M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A \\ \hline \Delta\hat{A}M = E\hat{\Gamma}M \end{array}$$
)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $\text{ΑΜ} = \text{ΜΓ}$ συνεπώς το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές.

Γ4. Η γωνία $\text{Δ}\hat{\text{Α}}x'$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔΑΓ, άρα θα ισχύει:

$\text{Δ}\hat{\text{Α}}x' > \text{Δ}\hat{\text{Γ}}\text{Α} = \text{Μ}\hat{\text{Γ}}\text{Α}$. Όμως αποδείξαμε ότι το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές οπότε $\text{Μ}\hat{\text{Γ}}\text{Α} = \text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$, άρα $\text{Δ}\hat{\text{Α}}x' > \text{Μ}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε Ρ εξωτερικό σημείο του κύκλου (Λ, ρ) άρα $\text{ΡΑ} = \text{ΡΒ}$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Έχουμε Ρ εξωτερικό σημείο του κύκλου $(\text{Κ}, R)$ άρα $\text{ΡΓ} = \text{ΡΔ}$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε:
$$\begin{array}{rl} & \text{ΡΓ} = \text{ΡΔ} \\ - & \text{ΡΑ} = \text{ΡΒ} \\ \hline & \text{ΑΓ} = \text{ΒΔ} \end{array}$$

Δ2.

<u>1^ος Τρόπος</u>

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΓ και ΚΒΔ

- $\text{Κ}\hat{\text{Γ}}\text{Α} = \text{Κ}\hat{\text{Δ}}\text{Β} = 90°$
- $\text{ΑΓ} = \text{ΒΔ}$ (από Δ1 ερώτημα)
- $\text{ΚΓ} = \text{ΚΔ}$ (ως ακτίνες)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $\text{ΚΑ} = \text{ΚΒ}$ οπότε το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

<u>2^ος Τρόπος</u>

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΛΚ και ΒΛΚ

- $\text{ΑΛ} = \text{ΒΛ}$ (ως ακτίνες)
- $\text{Α}\hat{\Lambda}\text{Κ} = \text{Β}\hat{\Lambda}\text{Κ}$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\text{Α}\hat{\Lambda}\text{Ρ}$ και $\text{Β}\hat{\Lambda}\text{Ρ}$)
  (έχουμε $\text{Α}\hat{\Lambda}\text{Ρ} = \text{Β}\hat{\Lambda}\text{Ρ}$ διότι η ΡΛ είναι διακεντρική ευθεία)
- ΚΛ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $\text{ΚΑ} = \text{ΚΒ}$

οπότε το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

3ος Τρόπος

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα KAP και KBP

- $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)
- $\mathrm{A\hat{P}K}=\mathrm{B\hat{P}K}$ (η KP είναι διακεντρική ευθεία)
- KP (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $\mathrm{KA}=\mathrm{KB}$
οπότε το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

Δ3. i) Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\mathrm{K A\Lambda}$ έχουμε

$$\mathrm{KA}<\mathrm{K\Lambda}+\mathrm{\Lambda A}\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{KA}<(R+\rho)+\rho\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{KA}<R+2\rho\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{KA}<2\rho+2\rho\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{KA}<4\rho$$

ii) Έχουμε $\Pi=\mathrm{KA}+\mathrm{KB}+\mathrm{AB}$

από Δ3 i) ερώτημα έχουμε ότι $\mathrm{KA}<4\rho$

από Δ2 ερώτημα έχουμε ότι $\mathrm{KA}=\mathrm{KB}$ άρα $\mathrm{KB}<4\rho$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\mathrm{A\Lambda B}$ έχουμε

$$\mathrm{AB}<\mathrm{\Lambda A}+\mathrm{\Lambda B}\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{AB}<\rho+\rho\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{AB}<2\rho$$

Άρα
$$\begin{array}{r} \mathrm{KA}<4\rho \\ \mathrm{KB}<4\rho \\ +\ \mathrm{AB}<2\rho \\ \hline \mathrm{KA}+\mathrm{KB}+\mathrm{AB}<4\rho+4\rho+2\rho\Leftrightarrow \\ \Pi<10\rho \end{array}$$