ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 63 σχολικού βιβλίου

Α2.

Πίνακας 1		
1	2	3
δ	γ	β

Α3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

- $\pi - 3 > 0$ άρα $|\pi - 3| = \pi - 3$
- $\sqrt{8} - \pi < 0$ άρα $\left|\sqrt{8} - \pi\right| = -\left(\sqrt{8} - \pi\right) = -\sqrt{8} + \pi$
- $4 - \sqrt{8} > 0$ άρα $\left|4 - \sqrt{8}\right| = 4 - \sqrt{8}$

Άρα $\alpha = -(\pi - 3) + \left(-\sqrt{8} + \pi\right) - \left(4 - \sqrt{8}\right)$

$\alpha = -\pi + 3 - \sqrt{8} + \pi - 4 + \sqrt{8}$

$\alpha = -1$

Β2. Έχουμε: $\beta^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow \beta^3 = 64$

$$\Leftrightarrow \beta = \sqrt[3]{64}$$
$$\Leftrightarrow \beta = 4$$

Β3. Αφού $x \in (\alpha, \beta)$ έχουμε ότι $\alpha < x < \beta$ οπότε $-1 < x < 4$

- $x > -1 \Leftrightarrow x + 1 > 0$ άρα $|x+1| = x+1$
- $x < 4 \Leftrightarrow x - 4 < 0$ άρα $|x-4| = -(x-4) = -x+4$

Άρα $\mathrm{A} = |x+1| + |x-4| = x+1-x+4 = 5$ δηλαδή ανεξάρτητη του x

Β4. Έχουμε: $|x-5| = 10 \Leftrightarrow x-5 = 10$ ή $x-5 = -10$

$$\Leftrightarrow x = 10+5 \ \text{ ή } \ x = -10+5$$
$$\Leftrightarrow x = 15 \ \text{ ή } \ x = -5$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έχουμε: $\lambda^2(x-1) = 2(2x-\lambda) \Leftrightarrow \lambda^2 x - \lambda^2 = 4x - 2\lambda$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 x - 4x = \lambda^2 - 2\lambda$$
$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)x = \lambda(\lambda-2)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)x = \lambda(\lambda-2)$$

Γ2. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 \neq 0$ και $\lambda + 2 \neq 0$

  $$\Leftrightarrow \lambda \neq 2 \quad \text{και} \quad \lambda \neq -2$$

  τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \dfrac{\lambda(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)} = \dfrac{\lambda}{\lambda+2}$
- Αν $\lambda = 2$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
- Αν $\lambda = -2$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x = 8$ και είναι αδύνατη.

Γ3. Για $\lambda = 2$ η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$\left||x-2|-4\right| = \left|2-|2-x|\right| \Leftrightarrow$$

$$|x-2|-4 = 2-|2-x| \quad \text{ή} \quad |x-2|-4 = -\left(2-|2-x|\right)$$

Όμως:

- $|x-2|-4 = 2-|2-x| \Leftrightarrow |x-2|+|2-x| = 2+4$

$$\Leftrightarrow 2|x-2| = 6$$

$$\Leftrightarrow |x-2| = 3$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 3 \quad \text{ή} \quad x-2 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

- $|x-2|-4 = -\left(2-|2-x|\right) \Leftrightarrow |x-2|-4 = -2+|2-x|$

$$\Leftrightarrow |x-2|-|2-x| = -2+4$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 \text{ Αδύνατη}$$

Γ4. Έχουμε:

$$x_0 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

$$x_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} + \frac{2+\sqrt{2}}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$x_0 = \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$x_0 = \frac{4}{2^2-\sqrt{2}^2}$$

$$x_0 = \frac{4}{4-2}$$

$$x_0 = 2$$

Όμως $x_0 = \dfrac{\lambda}{\lambda+2} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda}{\lambda+2} = 2$

$\Leftrightarrow 2\lambda + 4 = \lambda$

$\Leftrightarrow \lambda = -4$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

α) Έχουμε: $\dfrac{3\alpha}{\alpha^2-1} = \dfrac{2\alpha-1}{\alpha+1} - \dfrac{\alpha-3}{\alpha-1} \Leftrightarrow$

$$\frac{3\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \Leftrightarrow$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha - 1 \neq 0$ και $\alpha + 1 \neq 0$

$\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq -1$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$(\alpha-1)(\alpha+1)\frac{3\alpha}{(\alpha-1)(\alpha+1)} = (\alpha-1)(\alpha+1)\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} - (\alpha-1)(\alpha+1)\frac{\alpha-3}{\alpha-1} \Leftrightarrow$$

$3\alpha = (\alpha-1)(2\alpha-1) - (\alpha+1)(\alpha-3) \Leftrightarrow$

$3\alpha = 2\alpha^2 - \alpha - 2\alpha + 1 - \left(\alpha^2 - 3\alpha + \alpha - 3\right) \Leftrightarrow$

$3\alpha = 2\alpha^2 - 3\alpha + 1 - \alpha^2 + 3\alpha - \alpha + 3 \Leftrightarrow$

$3\alpha = \alpha^2 - \alpha + 4 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - \alpha - 3\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha = 2$ Δεκτή

β) Έχουμε: $\sqrt{\beta^2-8\beta+16}+\left|\beta^2-16\right|=0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(\beta-4)^2}+\left|\beta^2-16\right|=0 \Leftrightarrow$$

$$\left|\beta-4\right|+\left|\beta^2-16\right|=0 \Leftrightarrow$$

$\beta-4=0 \Leftrightarrow$ και $\beta^2-16=0 \Leftrightarrow$

$\beta=4$ $\qquad$ $\beta^2=16 \Leftrightarrow$

$\beta=\sqrt{16}$ ή $\beta=-\sqrt{16}$

$\beta=4$ ή $\beta=-4$

Άρα $\beta=4$

Δ2.

α) Έχουμε:

$$\gamma=\frac{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{16}}{2\cdot\sqrt[12]{2}}=\frac{8^{\frac{1}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}}{2\cdot 2^{\frac{1}{12}}}=\frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{1+\frac{1}{12}}}=\frac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{13}{12}}}=\frac{2^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}}{2^{\frac{13}{12}}}=\frac{2^{\frac{25}{12}}}{2^{\frac{13}{12}}}=2^{\frac{12}{12}}=2$$

β) Έχουμε:

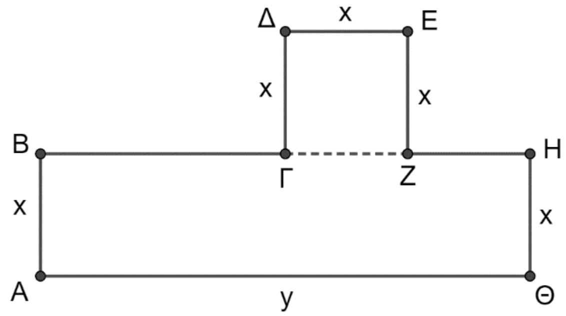
$$\delta=\left(\frac{\sqrt{27}+\sqrt{18}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2=3^2=9$$

Δ3.

i) Έχουμε ότι: $2 \le x \le 4$ και $2 \le y \le 9$

Η περίμετρος Π του σχήματος είναι:

$$\Pi = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EZ + ZH + H\Theta + \Theta A$$
$$\Pi = x + (B\Gamma + \Delta E + ZH) + x + x + x + y$$
$$\Pi = x + y + x + x + x + y$$
$$\Pi = 4x + 2y$$



Το εμβαδόν E του σχήματος είναι:

$$E = E_{\Delta EZ\Gamma} + E_{BH\Theta A}$$
$$E = x^2 + xy$$

ii)

Έχουμε: $2 \le x \le 4 \Leftrightarrow 8 \le 4x \le 16 \quad (1)$

$2 \le y \le 9 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 18 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$8 + 4 \le 4x + 2y \le 16 + 18 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 34$$

Επειδή τα μέλη της ανίσωσης $2 \le x \le 4$ είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, οπότε έχουμε:

$$2^2 \le x^2 \le 4^2 \Leftrightarrow 4 \le x^2 \le 16 \quad (3)$$

Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων $2 \le x \le 4$ και $2 \le y \le 9$ είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, οπότε έχουμε:

$$2 \cdot 2 \le xy \le 4 \cdot 9 \Leftrightarrow 4 \le xy \le 36 \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$4 + 4 \le x^2 + xy \le 16 + 36 \Leftrightarrow 8 \le E \le 52$$