ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 14 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A'\Delta'B'}$

- $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = \mathrm{A'\hat{\Delta}'B'} = 90^\circ$
- $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A'\Delta'}$ (υπόθεση)
- $\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$ (υπόθεση)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}'$

Β2.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και $\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'$

- $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = \text{Β}'\hat{\text{Α}}'\text{Γ}' = 90°$
- $\text{ΑΒ} = \text{Α}'\text{Β}'$ (υπόθεση)
- $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Β}}'$ (από την 1^{η} σύγκριση)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Επειδή $\text{Α}x$ εξωτερική διχοτόμος ισχύει ότι $y\hat{\text{Α}}x = x\hat{\text{Α}}\text{Γ}$

Επειδή $\text{Α}x//\text{ΒΓ}$ έχουμε $y\hat{\text{Α}}x = \text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$ ως εντός εκτός και επί ταύτα.

ακόμα $x\hat{\text{Α}}\text{Γ} = \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Β}$ ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $y\hat{\text{Α}}x = x\hat{\text{Α}}\text{Γ}$ έχουμε $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} = \text{Α}\hat{\text{Γ}}\text{Β}$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Γ2.

Στο τετράπλευρο ΑΔΓΒ οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο άρα $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$

Ακόμα στο τετράπλευρο ΖΑΓΒ οι διαγώνιες διχοτομούνται συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο άρα $\text{ΖΑ} = \text{ΒΓ}$

Οπότε $\text{ΑΔ} = \text{ΑΖ}$

Γ3.

Έχουμε $\text{ΑΔ}//\text{ΒΓ}$ διότι ΑΔΓΒ παραλληλόγραμμο.

Έχουμε $\text{ΑΖ}//\text{ΒΓ}$ διότι ΖΑΓΒ παραλληλόγραμμο.

Άρα $\text{ΑΔ}//\text{ΑΖ}$ από όπου προκύπτει ότι τα σημεία Ζ, Α και Δ είναι συνευθειακά. (Ευκλείδειο αίτημα)

Γ4.

Έχουμε $Ζ\Delta//ΒΓ$ από προηγούμενο ερώτημα οπότε το τετράπλευρο $Ζ\Delta ΓΒ$ είναι τραπέζιο.

Έχουμε $ΖΒ = ΑΓ$ διότι $ΖΑΓΒ$ παραλληλόγραμμο.

Έχουμε $\Delta Γ = ΑΒ$ διότι $Α\Delta ΓΒ$ παραλληλόγραμμο.

Ακόμα $ΑΒ = ΑΓ$ διότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

Άρα $ΖΒ = \Delta Γ$ δηλαδή οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες , συνεπώς $Ζ\Delta ΓΒ$ ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Α\Delta Μ$ έχουμε ότι $\Delta\hat{Α}Μ = 30°$ και $Α\hat{Μ}\Delta = 90°$ άρα $Α\hat{\Delta}Μ = 60°$.

Η $Β\Delta$ ως διαγώνιος του ρόμβου $ΑΒΓ\Delta$ διχοτομεί την γωνία $Α\hat{\Delta}Μ$ συνεπώς $Θ\hat{\Delta}Μ = 30°$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $Θ\Delta Μ$ η γωνία $Θ\hat{\Delta}Μ = 30°$ άρα $ΘΜ = \frac{Θ\Delta}{2}$.

Δ2.

Το $ΑΒΓ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $Β\Delta$ και $ΑΓ$ διχοτομούνται

Το $ΑΛΓΜ$ είναι ορθογώνιο άρα $ΛΜ$ και $ΑΓ$ διχοτομούνται

άρα οι διαγώνιες $ΑΓ, \Delta Β$ και $ΛΜ$ συντρέχουν.

Δ3.

Το τρίγωνο $Α\Delta Γ$ είναι ισοσκελές με την γωνία $Α\hat{\Delta}Γ = 60°$ άρα είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς $ΑΜ$ και $\Delta Ο$ διάμεσοι οπότε το $Θ$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Άρα έχουμε $\Delta Θ = \frac{2}{3}\Delta Ο$ και $ΘΟ = \frac{1}{3}\Delta Ο$

Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με την γωνία $Α\hat{Β}Γ = 60°$ άρα είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς $ΓΛ$ και $ΒΟ$ διάμεσοι οπότε το $Κ$ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Άρα έχουμε $ΒΚ=\frac{2}{3}ΒΟ$ και $ΚΟ=\frac{1}{3}ΒΟ$

Όμως $ΔΟ=ΒΟ$, οπότε έχουμε

$$ΔΘ=\frac{2}{3}ΔΟ$$

$$ΘΚ=ΘΟ+ΟΚ=\frac{1}{3}ΔΟ+\frac{1}{3}ΔΟ=\frac{2}{3}ΔΟ$$

$$ΒΚ=\frac{2}{3}ΔΟ$$

Συνεπώς ισχύει $ΔΘ=ΘΚ=ΚΒ$

Δ4.

Το τρίγωνο $ΑΚΒ$ είναι ισοσκελές διότι η $ΚΛ$ είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς

$ΑΚ=ΚΒ$ όμως $ΒΚ=\frac{1}{3}ΔΒ$ διότι $ΔΘ=ΘΚ=ΚΒ$

Άρα $ΑΚ=\frac{1}{3}ΔΒ$

Εναλλακτικά

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΘΑΒ$ η $ΑΚ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, συνεπώς

$$ΑΚ=\frac{1}{2}ΒΘ=ΑΚ=\frac{1}{2}ΒΘ=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}ΔΒ=\frac{1}{3}ΔΒ$$