ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 22 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 42 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$

- $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Delta}E = 90°$
- $A\Delta = \Delta E$ (υπόθεση)
- $B\Delta$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BE\Gamma$

- $AB = BE$ (από την $1^η$ σύγκριση)
- $A\hat{B}\Gamma = E\hat{B}\Gamma$ (από την $1^η$ σύγκριση)
- $B\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β3. Επειδή τα σημεία $Β$ και $Γ$ ισαπέχουν από τα σημεία $Α$ και $Ε$, η $ΒΓ$ είναι μεσοκάθετος της πλευράς $ΑΕ$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $ΑΒ = ΑΓ \Leftrightarrow$

$$ΑΔ + ΔΒ = ΑΕ + ΕΓ \Leftrightarrow$$

$$ΑΔ + 3ΑΔ = ΑΕ + 3ΑΕ \Leftrightarrow$$

$$4ΑΔ = 4ΑΕ \Leftrightarrow$$

$$ΑΔ = ΑΕ$$

Γ2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΚΔ$ και $ΑΚΕ$

- $ΑΔ = ΑΕ$ (από το 1ο ερώτημα)
- $Δ\hat{Α}Κ = Ε\hat{Α}Κ$ (η $ΑΜ$ ως ύψος στη βάση του ισοσκελούς τρίγωνου $ΑΒΓ$ είναι και διχοτόμος)
- $ΑΚ$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $ΔΚ = ΚΕ$

Γ3. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΖΚΜ$ και $ΗΚΜ$

- $Κ\hat{Μ}Ζ = Κ\hat{Μ}Η = 90°$
- $Ζ\hat{Κ}Μ = Η\hat{Κ}Μ$ (ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $Ε\hat{Κ}Α$ και $Δ\hat{Κ}Α$)
- $ΚΜ$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως $ΚΖ = ΚΗ$ άρα το τρίγωνο $ΚΖΗ$ είναι ισοσκελές.

Γ4. Η $ΑΜ$ ως ύψος στη βάση του ισοσκελούς τρίγωνου $ΑΒΓ$ είναι και και διάμεσος συνεπώς ισχύει $ΜΒ = ΜΓ$.

Ακόμα επειδή τα τρίγωνα $ΖΚΜ$ και $ΗΚΜ$ είναι ίσα ισχύει $ΜΖ = ΜΗ$

Άρα $ΜΒ = ΜΓ$

$$\begin{array}{l} ΜΖ = ΜΗ \quad - \\ \hline ΒΖ = ΗΓ \end{array}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AP\Delta}$ και BPZ

- $\mathrm{P\hat{A}\Delta = P\hat{B}Z = 90^\circ}$
- $\mathrm{A\Delta = BZ}$ (ως ίσες προεκτάσεις των ακτίνων OA και OB)
- $\mathrm{PA = PB}$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $\hat{\Delta} = \hat{Z}$

Δ2. Από την προηγούμενη σύγκρισή έχουμε $\mathrm{\Delta\hat{P}A = Z\hat{P}B}$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\mathrm{A\hat{P}O = B\hat{P}O}$ διότι η OP είναι διακεντρική ευθεία.

Άρα $\mathrm{\Delta\hat{P}A = Z\hat{P}B}$

$$\mathrm{A\hat{P}O = B\hat{P}O} \; +$$

$$\overline{\mathrm{\Delta\hat{P}O = Z\hat{P}O}}$$

Άρα η OP διχοτομεί την γωνία $\mathrm{\Delta\hat{P}Z}$

Δ3. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο AOB έχουμε

$\mathrm{AB < AO + OB} \Leftrightarrow$

$\mathrm{AB < OB + BZ} \Leftrightarrow$

$\mathrm{AB < OZ}$

Δ4. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\mathrm{\Delta OP}$ έχουμε

$\mathrm{\Delta O < \Delta P + PO}$

Όμως στο τρίγωνο $\mathrm{\Delta PO}$ η PA είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι ισοσκελές άρα $\mathrm{\Delta P = PO}$ οπότε:

$\mathrm{\Delta O < PO + PO} \Leftrightarrow$

$\mathrm{\Delta O < 2PO} \Leftrightarrow$

επίσης στο τρίγωνο OPZ η PB είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι και αυτό ισοσκελές άρα $\mathrm{PO = PZ}$ οπότε:

$\mathrm{\Delta O < 2PZ} \quad (1)$

Ακόμα από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $ΟΡΖ$ έχουμε

$ΟΖ < ΡΟ + ΡΖ \Leftrightarrow$

$ΟΖ < 2ΡΖ \quad (2)$

Από $(1)+(2)$ έχουμε: $ΔΟ + ΟΖ < 4ΡΖ$

Εναλλακτικά έχουμε:

Παρατηρούμε ότι: $ΔΑ = ΑΟ = ΟΒ = ΒΖ = ρ$

Έχουμε $ΔΟ + ΟΖ < 4ΡΔ \Leftrightarrow$

$ΔΑ + ΑΟ + ΟΒ + ΒΖ = 4ΔΡ \Leftrightarrow$

$ρ + ρ + ρ + ρ < 4ΔΡ \Leftrightarrow$

$4ρ < 4ΔΡ \Leftrightarrow$

$ρ < ΔΡ \Leftrightarrow$

$ΑΔ < ΔΡ$ το οποίο ισχύει διότι στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΡ$ η $ΔΡ$ είναι υποτείνουσα και η $ΑΔ$ κάθετη.