

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 23 Ιανουαρίου 2021

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδες 51-52 Θεώρημα IV

Α2. Σελίδα 49

- Α3. α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

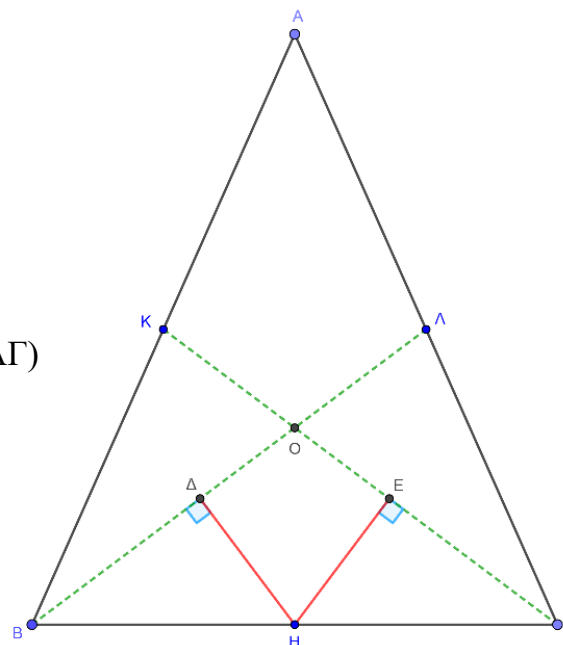
ΘΕΜΑ Β

Β1. Φέρνουμε τις διαμέσους ΒΛ, ΓΚ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΛΓ :

- $BK = GL$ (ως μισά των ίσων πλευρών AB, AG)
- $\widehat{KB\Gamma} = \widehat{B\Gamma L}$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές)
- $B\Gamma = B\Gamma$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ) είναι ίσα.

Οπότε και $B\Lambda = \Gamma K$.

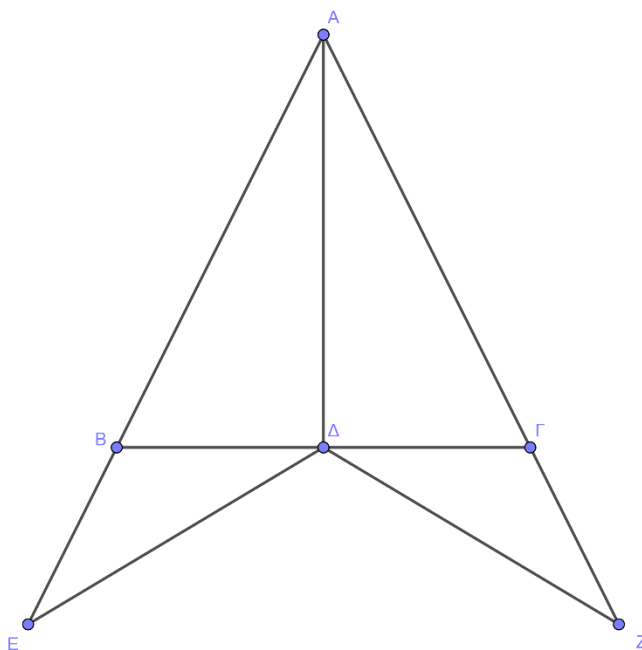
B2. Από το ερώτημα **B1** τα τρίγωνα $BΓΚ$ και $BΛΓ$ είναι ίσα, άρα και οι γωνίες $\widehat{ΟΒΓ}$ και $\widehat{ΟΓΒ}$ είναι ίσες. Οπότε το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές.

B3. Φέρνουμε από το σημείο H τις αποστάσεις προς τις διαμέσους $ΒΛ$ και $ΓΚ$. Έστω Δ και E οι προβολές του H προς τις διαμέσους. Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα $ΒΔΗ$ και $ΗΕΓ$ προκύπτει:

- $BH = HG$ (H μέσο $BΓ$)
- $\widehat{ΗΒΔ} = \widehat{ΗΓΕ}$ (το τρίγωνο $ΒΟΓ$ είναι ισοσκελές)

Οπότε από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (υποτείνουσα και οξεία γωνία αντίστοιχα μία προς μία ίσες) είναι ίσα. Άρα: $HΔ = HE$.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Τα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΑΔΖ$ έχουν:

- $ΑΕ=ΑΖ$ (υπόθεση)
- $\widehat{ΕΑΔ} = \widehat{ΖΑΔ}$ ($ΑΔ$ διχοτόμος)
- $ΑΔ=ΑΔ$ (κοινή πλευρά)

άρα από κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ) είναι ίσα.

Γ2. Τα τρίγωνα $\triangle AED$ και $\triangle ADZ$ είναι ίσα οπότε προκύπτει ότι:

- $DE = DZ$ (1) και
- $\widehat{AED} = \widehat{AZD}$, άρα και $\widehat{BED} = \widehat{GZD}$ (2)

Τα τρίγωνα $\triangle BED$ και $\triangle GZD$ είναι ισοσκελή ($BE = BD$ και $GD = GZ$) με:

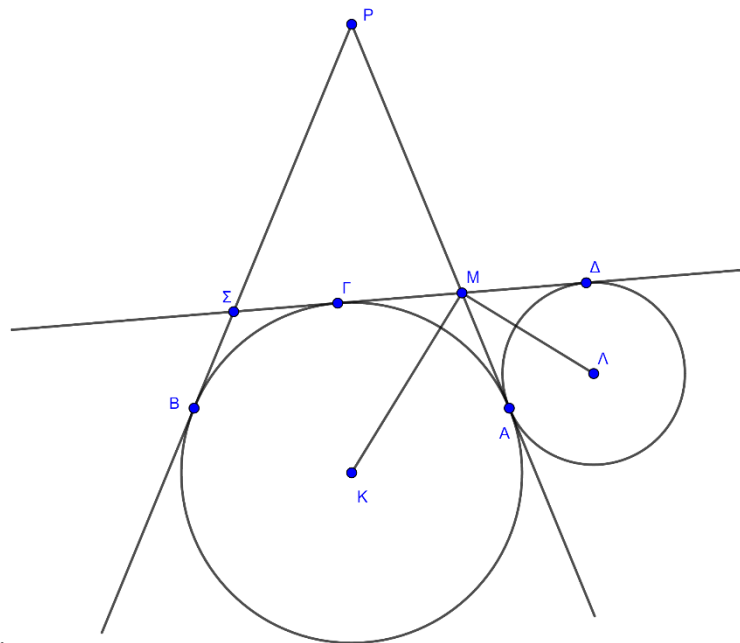
$$\widehat{BDE} = \widehat{BED} \text{ και } \widehat{GZD} = \widehat{GZD} \text{ (3).}$$

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\triangle BED$ και $\triangle GZD$ έχουμε ότι:

- $DE = DZ$ (από (1))
- $\widehat{BED} = \widehat{GZD}$ (από (2))
- $\widehat{BDE} = \widehat{GZD}$ (από (2) και (3))
άρα είναι ίσα από το κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ).

Γ3. Έχει αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $\triangle BED$, $\triangle GZD$ είναι ίσα, οπότε $BD = GD$, άρα AD διάμεσος στο $\triangle ABG$. Επειδή δίνεται ότι AD διχοτόμος, το τρίγωνο $\triangle ABG$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Έχουμε ότι:

- $MA = MG$ (εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (K, R))
- $MA = MD$ (εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο (Λ, ρ))

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι $MG = MD$, δηλαδή M μέσο του GD .



Δ2. Η διακεντρική ευθεία $ΜΚ$ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων $ΜΓ$ και $ΜΑ$ ενώ η $ΜΛ$ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων $ΜΑ$ και $ΜΔ$. Οι γωνίες $\widehat{ΓΜΑ}$ και $\widehat{ΑΜΔ}$ είναι παραπληρωματικές οπότε $\widehat{ΓΜΑ} + \widehat{ΑΜΔ} = 180^\circ$ άρα $\widehat{ΚΜΑ} + \widehat{ΑΜΛ} = 90^\circ$ δηλαδή η γωνία $\widehat{ΚΜΛ}$ είναι ορθή.

Δ3. Είναι:

- $ΣΓ = ΣΒ$
- $ΓΜ = ΜΑ$
- $ΡΑ = ΡΒ$ (ως εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο $(Κ, R)$)

Οπότε:

$$ΡΣ + ΣΜ + ΡΜ = ΡΣ + ΣΓ + ΓΜ + ΡΜ = (ΡΣ + ΣΒ) + (ΜΑ + ΡΜ) = ΡΒ + ΡΑ = ΡΑ + ΡΑ = 2ΡΑ = 2ΡΒ.$$

Δ4. Από τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα $ΒΣΓ$, $ΓΜΑ$ ισχύει ότι:

- $ΒΓ < ΣΒ + ΣΓ \Rightarrow ΒΓ < ΣΓ + ΣΓ$ οπότε $ΒΓ < 2ΣΓ$ (1)
- $ΑΓ < ΓΜ + ΜΑ \Rightarrow ΑΓ < ΓΜ + ΓΜ$ οπότε $ΑΓ < 2ΓΜ$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$ΒΓ + ΑΓ < 2(ΣΓ + ΓΜ) \Rightarrow ΒΓ + ΑΓ < 2ΣΜ.$$