

	ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ	
	ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021 Α΄ ΦΑΣΗ	E_3.Μλ1Α(α)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 62.

A2. A-2-(ii)

A-1-(iii)

B-3-(i)

A3. (α) $\alpha = 0$ και $\beta = 0$

(β) $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

(γ) $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

(δ) $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

A4 Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής διότι αν για παράδειγμα $\alpha = \frac{1}{4}$ τότε

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} < \frac{1}{4} = \alpha$$

A5. (α) Σωστό

(β) Σωστό

(γ) Λάθος

(δ) Λάθος

(ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε

$$\kappa = |3 - \sqrt{17}| + |5 - \sqrt{17}| = -3 + \sqrt{17} + 5 - \sqrt{17} = 2$$

Διότι $3 - \sqrt{17} < 0$ αφού $3 = \sqrt{9} < \sqrt{17}$ και $5 - \sqrt{17} > 0$ αφού $5 = \sqrt{25} > \sqrt{17}$.

$$\lambda = x^2 - (x-3)(x+3) = x^2 - x^2 + 9 = 9$$

B2. $|x + \kappa| = \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow |x + 2| = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x + 2| = 3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \text{ ή } x + 2 = -3$

δηλαδή $x = 1$ ή $x = -5$

B3. $|2x - 1| \leq \kappa + \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow |2x - 1| \leq 2 + \sqrt{9} \Leftrightarrow |2x - 1| \leq 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$$

B4. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (που είναι δεκτή) ή $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ που είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)^2 - (\sqrt{5} + 1)^2 - 4(1 - \sqrt{5}) + 5 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 5 - 2\sqrt{5} + 1 - (5 + 2\sqrt{5} + 1) - 4 + 4\sqrt{5} + 5 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 5 - 2\sqrt{5} + 1 - 5 + 2\sqrt{5} - 1 - 4 + 4\sqrt{5} + 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\beta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{8}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \sqrt{24}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{48} + \sqrt{16} + \sqrt{144} - \sqrt{48}}{6 - 2} \Leftrightarrow \beta = \frac{4 + 12}{4} \Leftrightarrow \beta = 4$$

Γ2. Έχουμε ότι $x \in [1, 4]$ άρα $1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$ και $x - 4 \leq 0$. Άρα

$$A = |x-1| - |x-4| + 5 \Leftrightarrow A = x-1 - (-x+4) + 5 \Leftrightarrow$$

$$A = x-1+x-4+5 \Leftrightarrow A = 2x$$

$$\frac{4}{A-1} + \frac{2}{A+1} = \frac{A^2+2}{A^2-1} \Leftrightarrow \frac{4}{2x-1} + \frac{2}{2x+1} = \frac{4x^2+2}{4x^2-1}$$

$$\text{Πρέπει } (2x-1)(2x+1) \neq 0$$

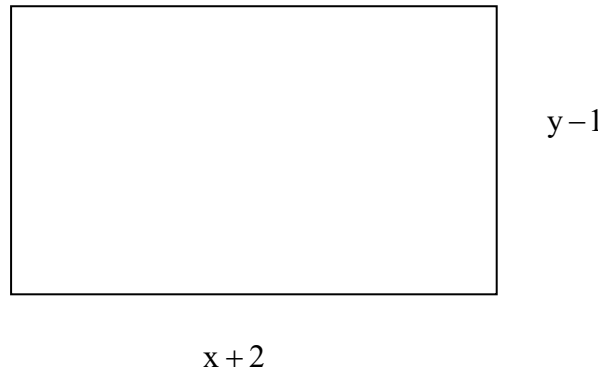
Άρα $2x-1 \neq 0$ και $2x+1 \neq 0$ δηλαδή $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$ που ισχύουν, αφού $x \in [1, 4]$.

$$\text{Είναι } 4(2x+1) + 2(2x-1) = 4x^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$8x+4+4x-2 = 4x^2+2 \Leftrightarrow 4x^2-12x=0 \Leftrightarrow$$

$$4x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (απορρίπτεται)} \text{ ή } x=3 \text{ (δεκτή)}$$

Γ3. Έχουμε ότι $1 \leq x \leq 4$ και $2 \leq y \leq 8$ καθώς και το σχήμα μας.



$$\text{Τότε } \Pi = 2(x+2) + 2(y-1) = 2x+4+2y-2 = 2x+2y+2 = 2(x+y+1)$$

$$\text{και } E = (x+2)(y-1) .$$

Αφού έχουμε ότι $1 \leq x \leq 4$ και $2 \leq y \leq 8$ προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε
 ότι $3 \leq x+y \leq 12 \Leftrightarrow 4 \leq x+y+1 \leq 13 \Leftrightarrow 8 \leq 2(x+y+1) \leq 26 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 26$.

Ομοίως, έχουμε ότι $1 \leq x \leq 4$ και $2 \leq y \leq 8$, άρα $3 \leq x+2 \leq 6$ και $1 \leq y-1 \leq 7$.
 Επομένως, $3 \leq (x+2)(y-1) \leq 42$ άρα $3 \leq E \leq 42$.

$$3 \leq x + y \leq 12 \Leftrightarrow 4 \leq x + y + 1 \leq 13 \Leftrightarrow 2 > 0$$

Γ4. Έχουμε ότι $1 \leq x \leq 4$ οπότε η εξίσωση γίνεται .

$$A^3 = -27 \Leftrightarrow A = -\sqrt[3]{-27} \Leftrightarrow A = -3 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ Αδύνατη αφού } x \in [1, 4].$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε

$$\lambda^4 x - \lambda^3 = x - \lambda \Leftrightarrow \lambda^4 x - x = \lambda^3 - \lambda \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^4 - 1)x = \lambda(\lambda^2 - 1) \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)x = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)x = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad (A)$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη, όταν :

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (1) ισχύει μόνο όταν $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Η εξίσωση (2) ισχύει μόνο όταν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2)
επομένως η εξίσωση (A) δεν είναι αδύνατη.

Η εξίσωση (A) έχει μοναδική λύση, όταν :

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1 \text{ και } \lambda^2 \neq -1 (\text{που ισχύει})$$

$$\text{Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η } x_0 = \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$$

Δ2. Έχουμε

$$|x_0| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda|}{|\lambda^2 + 1|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1 > 0)$$

$$\frac{|\lambda|}{\lambda^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1 > 0) \Leftrightarrow 2|\lambda| \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1.$$

Δ3. Η εξίσωση είναι ταυτότητα όταν ,

$$\begin{aligned}
 (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) &= 0 \Leftrightarrow & \text{και} & \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{ή} & \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{ή} & \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow & \lambda = 0 \text{ ή } \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{ή} & \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 \lambda = 1 & \lambda = -1 & \lambda^2 = -1 & \lambda = 1 & \lambda = -1 \\
 & & \text{Αδύνατη} & &
 \end{aligned}$$

οπότε για τις τιμές $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$ είναι ταυτότητα .

Για να ορίζεται η $^{-3\lambda_1}\sqrt[3]{5}$, πρέπει $-3\lambda_1$ να είναι θετικός ακέραιος οπότε $\lambda_1 = -1$ και άρα $\lambda_2 = 1$.

Έχουμε

$$\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^3 + 1} = \sqrt{1^2 - (-1)^3 + 1} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \text{ και } ^{-3\lambda_1}\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5} .$$

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι} \quad \sqrt[3]{5} &= \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \\
 \sqrt{3} &= \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}
 \end{aligned}$$

Αφού $27 > 25$ άρα $\sqrt[6]{27} \geq \sqrt[6]{25}$, οπότε $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$.

Δ4. Έχουμε

$$\lambda_2 + |4x_0 + 1| = 1 - |16x_0^2 - 1| \Leftrightarrow (\lambda_2 = -1)$$

$$|4x_0 + 1| = -|4x_0 + 1| \cdot |4x_0 + 1| \Leftrightarrow$$

$$|4x_0 + 1| + |4x_0 + 1| \cdot |4x_0 + 1| = 0 \Leftrightarrow$$

$$|4x_0 + 1| \cdot (1 + |4x_0 + 1|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|4x_0 + 1| = 0 \text{ ή } 1 + |4x_0 + 1| = 0$$

$$4x_0 + 1 = 0 \quad |4x_0 + 1| = -1$$

$$x_0 = -\frac{1}{4} \quad \text{Αδύνατη}$$