



ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2019

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 90

Α2. α. ($\alpha \rightarrow 1$) β. ($\beta \rightarrow 3$) γ. ($\gamma \rightarrow 2$) δ. ($\delta \rightarrow 5$)

Α3. α. Λάθος β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. α. $\alpha = \sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{12} + \sqrt{3}}$

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{12} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{3})}$$

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{12})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\alpha = \sqrt{12 - 3}$$

$$\alpha = \sqrt{9}$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta. \beta = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}} + \sqrt[3]{27}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{2} + 3}$$

$$\beta = \sqrt{1 + 3}$$

$$\beta = \sqrt{4}$$

$$\beta = 2$$

B2. α. $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \text{άρα } x_1 = 2 \quad \text{ή} \quad x_2 = 1$$

β. Έχουμε $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 2$

Συνεπώς $d(x, \rho_1) = \rho_2$

$$|x - 1| = 2$$

$$x - 1 = 2 \quad \text{ή} \quad x - 1 = -2$$

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

B3. $x^2 - x - 2 < 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \text{άρα } x_1 = 2 \quad \text{ή} \quad x_2 = -1$$

x	-∞	-1	2	+∞
x ² -x-2	+	0	-	0
	+	0	-	+

$$x \in (-1, 2)$$

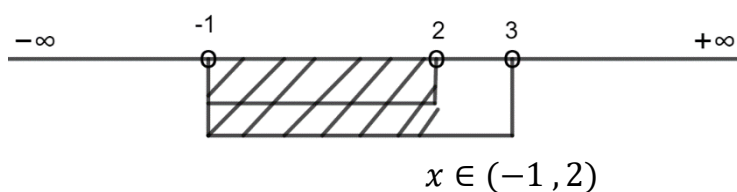
Επίσης έχουμε $|x - 1| < 2$

$$-2 < x - 1 < 2$$

$$-2 + 1 < x - 1 + 1 < 2 + 1$$

$$-1 < x < 3$$

Επομένως οι κοινές λύσεις είναι



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α. $x^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$

$$\Delta = [-(a + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a - 1)$$

$$\Delta = (a + 1)^2 - 4(2a - 1)$$

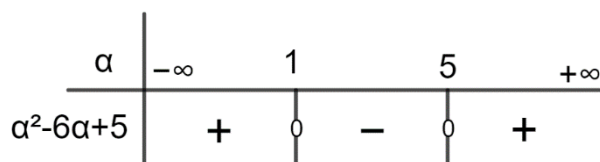
$$\Delta = a^2 + 2a + 1 - 8a + 4$$

$$\Delta = a^2 - 6a + 5$$

Γ2. Έχουμε $a^2 - 6a + 5 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad \text{άρα} \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 5$$



Παρατηρούμε ότι όταν $a \in (1, 5)$ η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική συνεπώς το τριώνυμο διατηρεί πρόσημό ομόσημο του 1.

Άρα όταν $a \in (1, 5)$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες αντίθετες θα πρέπει:

$\Delta > 0$ δηλαδή $\alpha \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ και επίσης

$$S = 0$$

$$-\frac{\beta}{\alpha} = 0$$

$$\frac{-[-(\alpha+1)]}{1} = 0$$

$$\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = -1$$

Αν $\alpha = -1$ τότε το τριώνυμο γίνεται

$$f(x) = x^2 - (-1 + 1)x + 2 \cdot (-1) - 1$$

$$f(x) = x^2 - 3$$

Οπότε $f(x) = 0$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{3}$$

Γ4. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές θα πρέπει

$\Delta \geq 0$ δηλαδή $\alpha \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ και επίσης

$$S < 0 \quad \text{και} \quad P > 0$$

$$-\frac{\beta}{\alpha} < 0 \quad \frac{\gamma}{\alpha} > 0$$

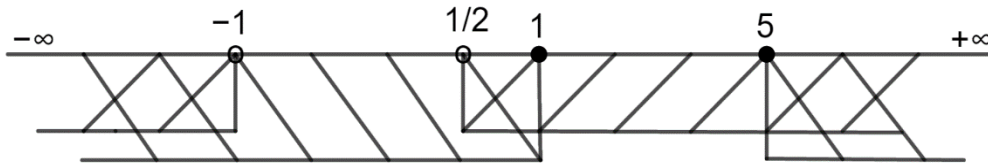
$$\frac{-[-(\alpha+1)]}{1} < 0 \quad \frac{2\alpha-1}{1} > 0$$

$$\alpha + 1 < 0 \quad 2\alpha - 1 > 0$$

$$\alpha < -1 \quad 2\alpha > 1$$

$$\alpha > \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν κοινές λύσεις



οπότε δεν υπάρχουν τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο να έχει δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές.

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πρέπει $x \neq 0$ και $x^2 \neq 0$
 $x \neq 0$ και $x \neq 0$

Οπότε η f ορίζεται στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ 1 - \frac{\mu}{1} + \frac{4}{1^2} &= 1 \\ 1 - \mu + 4 &= 1 \\ -\mu + 5 &= 1 \\ -\mu &= -4 \\ \mu &= 4 \end{aligned}$$

- Δ2.** Έχουμε $f(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in A$$

$$\text{Ακόμα } |x| \cdot \sqrt{f(x)} = 2$$

$$|x| \cdot \sqrt{\left(\frac{x-2}{x}\right)^2} = 2$$

$$|x| \cdot \frac{|x-2|}{|x|} = 2$$

$$|x-2| = 2$$

$$x-2 = 2 \quad \text{ή} \quad x-2 = -2$$

$$x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad (\text{Απορρίπτεται})$$

Δ3. Έχουμε $f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$

$$\text{Επομένως } f(1) = \left(\frac{1-2}{1}\right)^2 = \left(\frac{-1}{1}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$f(-1) = \left(\frac{-1-2}{-1}\right)^2 = \left(\frac{-3}{-1}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Άρα η ευθεία (ε) γίνεται $y = x + 9$

Θέτουμε $y = 0$ άρα $x = -9$ συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-9,0)$

Θέτουμε $x = 0$ άρα $y = 9$ συνεπώς η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,9)$

Δ4. Το συμμετρικό του $M(1,1)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $M_1(1, -1)$

Επειδή η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη με την (ε): $y = x + 9$ θα έχει την ίδια κλίση με αυτή οπότε θα είναι $\alpha = 1$.

Άρα η ζητούμενη ευθεία (ζ) θα είναι της μορφής $y = x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $M_1(1, -1)$ θα ισχύει $-1 = 1 + \beta$ οπότε θα έχουμε $\beta = -2$.

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι (ζ): $y = x - 2$