

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελίδα 71.

A2. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελίδα 31.

A3. $\alpha \rightarrow \Lambda$ $\beta \rightarrow \Sigma$ $\gamma \rightarrow \Sigma$ $\delta \rightarrow \Sigma$ $\varepsilon \rightarrow \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

B1. Επειδή $|2x-1|=|1-2x|$ η ανίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{|2x-1|}{3} - 1 &< \frac{3-|2x-1|}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12 \frac{|2x-1|}{3} - 12 \cdot 1 &< 12 \frac{(3-|2x-1|)}{4} \Leftrightarrow \\ 4|2x-1| - 12 &< 3(3-|2x-1|) \Leftrightarrow \\ 4|2x-1| - 12 &< 9 - 3|2x-1| \Leftrightarrow \\ 4|2x-1| + 3|2x-1| &< 12 + 9 \Leftrightarrow \\ 7|2x-1| &< 21 \Leftrightarrow \\ |2x-1| &< 3 \Leftrightarrow \\ -3 < 2x-1 &< 3 \Leftrightarrow \\ 1-3 < 2x &< 1+3 \Leftrightarrow \\ -2 < 2x &< 4 \Leftrightarrow \\ -1 < x < 2 &\Leftrightarrow x \in (-1, 2) \\ \text{Άρα } \Delta &= (-1, 2). \end{aligned}$$

B2. Εφόσον $x \in \Delta$ ισχύει $-1 < x < 2$.

Άρα $\boxed{x+1 > 0}$ και $\boxed{x-2 < 0}$ (1)

Η παράσταση A γράφεται:

$$A = \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1} + \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x-2|}{x-2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} A = \frac{x+1}{x+1} - \frac{(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$A = 1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$A = 0$$

Άρα ανεξάρτητη του x , δηλαδή σταθερός αριθμός.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$, ισχύει:

$$f(1) = -4 \Leftrightarrow$$

$$1^2 + \kappa \cdot 1 - 3 = -4 \Leftrightarrow$$

$$1 + \kappa - 3 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = -4 - 1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\kappa = -2}$$

Έτσι ο τύπος της f γίνεται: $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Η Διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ και } x_2 = \frac{2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\Gamma(3, 0)$ και $\Delta(-1, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$, βρίσκουμε το

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow f(0) = -3.$$

Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $E(0, -3)$.

Γ2. Εφόσον η ευθεία (ϵ) είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Οπότε η ευθεία (ϵ) έχει εξίσωση $y = 3x + \beta$ (1).

$$\text{Ισχύει } f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Άρα η ευθεία (ϵ) διέρχεται από το σημείο $B(-1, 0)$.

Έτσι οι συντεταγμένες του σημείου B επαληθεύουν την εξίσωση (1),

$$\text{γι' αυτό ισχύει: } 0 = -3 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $\boxed{y = 3x + 3}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BM1A(α)

Γ3. Επειδή τα σημεία $K(1, a), \Lambda(3, \beta), M(5, \gamma)$ ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y = 3x + 3$, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της.

$$\text{Άρα ισχύει: } a = 3 \cdot 1 + 3 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\beta = 3 \cdot 3 + 3 \Leftrightarrow \beta = 12$$

$$\gamma = 3 \cdot 5 + 3 \Leftrightarrow \gamma = 18$$

Για να είναι οι αριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει και

$$\text{αρκεί } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2 \cdot 12 = 6 + 18 \Leftrightarrow 24 = 24 \text{ που ισχύει.}$$

Οπότε οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Για την διακρινούσα Δ της εξίσωσης (1) ισχύει:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Delta = (4\lambda - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda(3 - 8\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 16\lambda^2 - 16\lambda + 4 - 12\lambda + 32\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 48\lambda^2 - 28\lambda + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4(12\lambda^2 - 7\lambda + 1) \quad (2)$$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο: $12\lambda^2 - 7\lambda + 1$

Η διακρινούσά του Δ' είναι:

$$\Delta' = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\Delta' = 49 - 48 \Leftrightarrow$$

$$\Delta' = 1$$

Άρα οι ρίζες του είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta'}}{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2 \cdot 12} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{7-1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \text{ και } \lambda_2 = \frac{7+1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Έτσι:

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΒΜλ1Α(α)

$$12\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 12\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 3 \cdot 4 \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = (3\lambda - 1) \cdot (4\lambda - 1). \quad (3)$$

Άρα από (2) και (3) έχουμε:

$$\Delta = 4(3\lambda - 1) \cdot (4\lambda - 1)$$

ii. Καθώς η (1) έχει διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(3\lambda - 1)(4\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda = 1 \Leftrightarrow \eta \quad 4\lambda = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{1}{3} \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

Ισχύει $\lambda_1 < \lambda_2$, άρα:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

Για $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4}$ η διπλή ρίζα της (1) είναι

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{(4\lambda_1 - 2)}{2} = -\frac{\left(4 \cdot \frac{1}{4} - 2\right)}{2} = -\frac{(1 - 2)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Δ2. Άρα $P(A) = x_0 = \frac{1}{2}$.

$$P(A \cap B) = \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

$$P\left[(A \cup B)'\right] = \lambda_1 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Όμως } P\left[(A \cup B)'\right] = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}.$$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΒΜλ1Α(α)

$$P(B) = \frac{9}{12} - \frac{6}{12} + \frac{4}{12} \Leftrightarrow P(B) = \frac{7}{12}.$$

Δ3. Εφόσον η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει $\Delta > 0$. Το πρόσημο της Διακρίνουσας Δ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Δ		+	○	-	○	+

$$\text{Έτσι } \lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{(4\lambda - 2)}{1} = -4\lambda + 2.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(3 - 8\lambda)}{1} = 3\lambda - 8\lambda^2.$$

$$\text{Ισχύει } 4x_1x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 26 \Leftrightarrow$$

$$4(3\lambda - 8\lambda^2) = 3(x_1 + x_2) - 26 \Leftrightarrow$$

$$4(3\lambda - 8\lambda^2) = 3(-4\lambda + 2) - 26 \Leftrightarrow$$

$$12\lambda - 32\lambda^2 = -12\lambda + 6 - 26 \Leftrightarrow$$

$$32\lambda^2 - 24\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$8\lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0.$$

Η Διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-5) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 36 + 160 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 196.$$

$$\text{Άρα } \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 8} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{6+14}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \text{ και } \lambda_2 = \frac{6-14}{16} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}.$$