

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Δευτέρα 5 Ιανουαρίου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 33.

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 71.

- A3. i. Λάθος
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $A = |4x - 8| + 1 = |4(x - 2)| + 1 = 4|x - 2| + 1$

i. Αφού $x \in [2, +\infty) \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x - 2 \geq 0$, δηλαδή $|x - 2| = x - 2$.

Οπότε $A = 4(x - 2) + 1 = 4x - 8 + 1 = 4x - 7$.

ii. Αφού $x \in (-\infty, 2) \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$, δηλαδή $|x - 2| = -(x - 2)$.

Οπότε $A = -4(x - 2) + 1 = -4x + 8 + 1 = -4x + 9$.

B2. Για $x \in [2, +\infty)$ είναι $A = 4x - 7$, οπότε ξεκινώντας από το πρώτο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$\frac{16x^2 - 49}{|4x - 8| + 1} = \frac{(4x)^2 - 7^2}{4x - 7} = \frac{(4x - 7)(4x + 7)}{4x - 7} = 4x + 7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i.

Για το α έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(\sqrt{6})^2 - \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{6 + 2}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

Για το β έχουμε:

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{25 - 3\sqrt{7 + \sqrt{32}}} = \sqrt{25 - 3\sqrt{7 + 2}} \\ &= \sqrt{25 - 3\sqrt{9}} = \sqrt{25 - 3 \cdot 3} = \sqrt{25 - 9} \\ &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Γ2. i.

Είναι $|\alpha - \beta| = |2 - 4| = |-2| = 2$ και $\frac{|\alpha + \beta|}{2} = \frac{|2 + 4|}{2} = \frac{6}{2} = 3$, οπότε η ανισότητα:

$$|\alpha - \beta| < x < \frac{|\alpha + \beta|}{2},$$

γίνεται $2 < x < 3$.

Τότε έχουμε $2 < x < 3 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 < 3x < 3 \cdot 3 \Leftrightarrow 6 < 3x < 9$.

Οπότε

$$\left. \begin{array}{l} 6 < 3x < 9 \\ 1 < y - x < 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 1 < 3x + y - x < 9 + 4 \Leftrightarrow 7 < 2x + y < 13$$

ii.

Αφού $\omega > 0$ έχουμε:

$$\omega + \frac{\alpha^2}{\omega} \geq \beta \Leftrightarrow \omega + \frac{2^2}{\omega} \geq 4 \Leftrightarrow \omega + \frac{4}{\omega} \geq 4 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega \cdot \frac{4}{\omega} \geq 4\omega \Leftrightarrow$$

$$\omega^2 - 4\omega + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\omega - 2)^2 \geq 0$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, οπότε και η αρχική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. $(A \cup B)'$: «Ο μαθητής δεν έχει ούτε κινητό ούτε tablet»

ii. $A \cap B$: «Ο μαθητής έχει και κινητό και tablet»

Δ2. i. Επιλέγουμε τυχαία μαθητή και το 10% αυτών δεν έχει ούτε κινητό ούτε tablet, οπότε $P((A \cup B)') = \frac{10}{100} = 0,1$.

Επομένως

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)').$$

Οπότε $P(A \cup B) = 1 - 0,1 = 0,9$ δηλαδή 90%.

ii. Επίσης το 30% έχει και κινητό και tablet, οπότε $P(A \cap B) = \frac{30}{100} = 0,3$.

• $(A - B) \cup (B - A)$: «Ο μαθητής έχει μόνο κινητό ή μόνο tablet»

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα, οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P((A - B) \cup (B - A)) &= P(A - B) + P(B - A) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,9 - 0,3 = 0,6 \text{ δηλαδή } 60\% \end{aligned}$$

Δ3. Είναι $P(A) = 2P(B)$, οπότε από τον προσθετικό νόμο, για τα ενδεχόμενα A και B προκύπτει ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,9 = 2P(B) + P(B) - 0,3 \Leftrightarrow$$

$$3P(B) = 0,9 + 0,3 \Leftrightarrow 3P(B) = 1,2 \Leftrightarrow P(B) = 0,4 \text{ δηλαδή } 40\%$$

Επομένως $P(A) = 2P(B) = 2 \cdot 0,4 = 0,8$ δηλαδή 80%.