

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Δευτέρα 5 Ιανουαρίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, A' συμπληρωματικά ενδεχόμενα του Ω , να αποδείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$.

Μονάδες 8

A2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$$

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι:

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|.$$

ii. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.

iii. Δυο ενδεχόμενα A και B θα λέμε ότι είναι ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \emptyset$.

iv. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0.$$

v. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τότε αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ θα είναι και $\alpha < \gamma$.

Μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παράσταση $A = |4x - 8| + 1$, όπου x πραγματικός αριθμός.

B1. Να αποδείξετε ότι:

i. $A = 4x - 7$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

Μονάδες 6

ii. $A = -4x + 9$ για κάθε $x \in (-\infty, 2)$.

Μονάδες 6

B2. Αν $x \in [2, +\infty)$ να δείξετε ότι

$$\frac{16x^2 - 49}{|4x - 8| + 1} = 4x + 7$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \text{ και } \beta = \sqrt{25 - 3\sqrt{7} + \sqrt[3]{32}}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $|\alpha - \beta| < x < \frac{|\alpha + \beta|}{2}$ και $1 < y - x < 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $2 < x < 3$ και $7 < 2x + y < 13$,

Μονάδες 8

ii. για κάθε πραγματικό αριθμό $\omega > 0$ ισχύει ότι:

$$\omega + \frac{\alpha^2}{\omega} \geq \beta$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Από μια έρευνα μεταξύ των μαθητών της Α΄ τάξης ενός Λυκείου, προέκυψε ότι το 10% των μαθητών δεν έχει ούτε κινητό ούτε tablet, ενώ το 30% έχει και κινητό και tablet. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

- Α: «το ενδεχόμενο ένας μαθητής έχει κινητό»
- Β: «το ενδεχόμενο ένας μαθητής έχει tablet».

Δ1. Να ορίσετε με τη χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i. ο μαθητής δεν έχει ούτε κινητό ούτε tablet,

Μονάδες 3

ii. ο μαθητής έχει και κινητό και tablet.

Μονάδες 3

Δ2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένας μαθητής:

i. να έχει κινητό ή tablet,

Μονάδες 5

ii. να έχει μόνο κινητό ή μόνο tablet.

Μονάδες 7

Δ3. Αν η πιθανότητα ένας μαθητής να έχει κινητό είναι διπλάσια από την πιθανότητα να έχει tablet, να βρεθούν τα $P(A)$ και $P(B)$.

Μονάδες 7