**ΤΑΞΗ:** Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ

**Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013**
**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Βλέπε απόδειξη (1) σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.

**Α2.** **α)** Βλέπε ορισμό σελίδα 72 σχολικού βιβλίου.
**β)** Βλέπε ορισμό σελίδα 57 σχολικού βιβλίου.

**Α3.** **α)** Σωστό (βλέπε σελίδα 55 σχολικού βιβλίου.)
**β)** Λάθος (βλέπε σελίδα 69 σχολικού βιβλίου.)
(Το Σωστό είναι ότι $\sqrt{a^2}=|a|$)
**γ)** Λάθος (βλέπε σελίδα 79 σχολικού βιβλίου.)
(Το Σωστό είναι ότι η εξίσωση αx + β = 0 είναι αδύνατη)
**δ)** Σωστό (βλέπε σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.)
**ε)** Σωστό (βλέπε σελίδα 107 σχολικού βιβλίου.)

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Για την παράσταση $\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ ισχύει:

$$\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3\cdot 4]{2^4}=\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{4}\;\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4\cdot 2}=\sqrt[3]{8}=2$$

**Β2.** Έχουμε:

$$B=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{1\cdot(2-\sqrt{2})+1\cdot(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4}{4-2}=\frac{4}{2}=2$$

**Β3.** Στο ερώτημα Β1 έχουμε αποδείξει ότι Α = 2, οπότε η παράσταση του δεύτερου μέλους της εξίσωσης ισούται με:

$$\frac{1}{A+\sqrt{A}}+\frac{1}{A-\sqrt{A}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\mathrm{B}=2$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$x^3=\frac{1}{A+\sqrt{A}}+\frac{1}{A-\sqrt{A}} \Leftrightarrow x^3=B \Leftrightarrow x^3=2 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Όταν δύο μη κατακόρυφες ευθείες είναι παράλληλες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $|a-3|-1$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση y=x είναι 1. Επομένως

$$|a-3|-1=1 \Leftrightarrow |a-3|=1+1 \Leftrightarrow |a-3|=2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha-3=2 \quad \text{ή} \quad \alpha-3=-2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha=3+2 \quad \text{ή} \quad \alpha=3-2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha=5 \quad \text{ή} \quad \alpha=1.$$

Θα εξετάσουμε αν είναι δεκτές και οι δυο τιμές του α.

- Για α = 5 η ευθεία ε γίνεται:
  $y=(|5-3|-1)x+(5^2+2|5|-3) \Leftrightarrow y=(|2|-1)x+(25+10-3) \Leftrightarrow$ y=x+32,
  η οποία είναι παράλληλη με την y=x.

- Για α = 1 η ε γίνεται:
  $y=(|1-3|-1)x+(1^2+2|1|-3) \Leftrightarrow y=(|-2|-1)x+(1+2-3) \Leftrightarrow$ y=x
  η οποία ταυτίζεται με την y=x. Άρα η τιμή α = 1 απορρίπτεται.
  Ώστε είναι α = 5.

**Γ2.** Επειδή η γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα xx είναι οξεία, έχει εφω > 0. Όμως, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) ισούται με την εφω, οπότε

$$|a-3|-1>0 \Leftrightarrow |a-3|>1 \Leftrightarrow a-3<-1 \quad \text{ή} \quad \alpha-3>1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha<3-1 \quad \text{ή} \quad \alpha>3+1 \Leftrightarrow \alpha<2 \quad \text{ή} \quad \alpha>4$$

**Γ3.** Πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του Ο(0,0) να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Για $x = y = 0$ η εξίσωση της ε δίνει:

$$0=(|a-3|-1)\cdot 0+(a^2+2|a|-3) \Leftrightarrow a^2+2|a|-3=0 \Leftrightarrow$$

$$|a|^2+2|a|-3=0$$

Θέτουμε:

$$|a|=\omega \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2+2\omega-3=0$$

Αυτή έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}$$

Είναι:

$$\omega_1=\frac{-2+4}{2}=1, \quad \omega_2=\frac{-2-4}{2}=-3 \text{ που απορρίπτεται.}$$

Για $\omega = 1$ η (1) δίνει

$$|\alpha|=1 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-1$$

## <u>ΘΕΜΑ Δ</u>

**Δ1.** Το τριώνυμο έχει $\alpha=4$, $\beta=-4\lambda$, $\gamma=5\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4\lambda)^2-4\cdot 4\cdot 5\lambda=16\lambda^2-80\lambda$$

Είναι:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 16\lambda^2-80\lambda=0 \Leftrightarrow 16\lambda(\lambda-5)=0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda=0 \text{ ή } \lambda-5=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ή } \lambda=5.$$

Το πρόσημο της διακρίνουσας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| **λ** | $-\infty$ | | 0 | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Δ** | | + | 0 | − | 0 | + | |

Επομένως για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 5$ είναι $\Delta = 0$ και

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty) \text{ ενώ } \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 5)$$

**Δ2.** **α.** Το τριώνυμο έχει δυο ρίζες άνισες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

**β.** Η f έχει πεδίο ορισμού το IR αν και μόνο αν

$$4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda \geq 0, \text{ για κάθε } x \in IR$$

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0, 5]$$

**Δ3.** Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες $x_1, x_2$ άνισες πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-4\lambda)}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{4\lambda}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \lambda$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{5\lambda}{4}$$

Επομένως

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5\lambda}{4} - 1 \Leftrightarrow 4\lambda = 5\lambda - 4 \Leftrightarrow 5\lambda - 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Όμως το $4 \notin (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$, επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ, ώστε να είναι $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1$

**Δ4.** Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Α΄ είναι

$$0 \le P(A) \le 1 \quad \text{και} \quad 0 \le P(A') \le 1$$

- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda\chi + 5\lambda$ με λ=P(A). Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_1 \le 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A)x + 5P(A) \ge 0, \text{ για κάθε } x \in IR \qquad \textbf{(1)}$$

- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda\chi + 5\lambda$ με $\lambda = P(A')$. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_2 \le 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A')x + 5P(A') \ge 0, \text{ για κάθε } x \in IR \qquad \textbf{(2)}$$

- Για την πιθανότητα του δειγματικού χώρου Ω είναι P(Ω)=1. Έτσι $4x^2 - 4P(\Omega) + 5P(\Omega) = 4x^2 - 4x + 5$, που είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με λ=P(Ω)=1. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_3 \le 0$,

  επομένως

$$4x^2 - 4x + 5 \ge 0, \text{ για κάθε } x \in IR \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$[\,4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)\,][\,4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')\,][\,4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega)\,] \ge 0$,
για κάθε $x \in IR$