

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 34.

A.2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 125.

- A.3.**
- α. ΣΩΣΤΟ
 - β. ΛΑΘΟΣ
 - γ. ΛΑΘΟΣ
 - δ. ΣΩΣΤΟ
 - ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B.1. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει

- $(x+1)^4 \geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

και

- $(x-2)^4 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και

- $x+1 \neq 0$ και $x-2 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$ και $x \neq 2$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

B.2. για κάθε $x \in A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ ο τύπος της f γίνεται

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^4}}{x+1} - \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{x-2} = \frac{\sqrt{[(x+1)^2]^2}}{x+1} - \frac{\sqrt{[(x-2)^2]^2}}{x-2} =$$

$$= \frac{|(x+1)^2|}{x+1} - \frac{|(x-2)^2|}{x-2} = \frac{|(x+1)^2|}{x+1} - \frac{|(x-2)^2|}{x-2} = x+1 - (x-2) = x+1-x+2=3$$

Άρα για κάθε $x \in A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ ισχύει ότι: $f(x) = 3$.

Έτσι $f(2012) = 3$.

B.3. Έτσι η ανίσωση $|18-3x| \leq f(2012)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} |18-3x| \leq f(2012) &\Leftrightarrow |3(6-x)| \leq 3 \Leftrightarrow 3|(6-x)| \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |6-x| \leq 1 \Leftrightarrow |x-6| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-6 \leq 1 \Leftrightarrow -1+6 \leq x \leq 1+6 \\ \text{Οπότε } x &\in [5, 7]. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.1. Η εξίσωση γίνεται:

$$x+1 = \lambda^2 - |\lambda| \cdot x \Leftrightarrow |\lambda| \cdot x + x = \lambda^2 - 1$$

$$\text{ή } (|\lambda| + 1) \cdot x = |\lambda|^2 - 1$$

ο συντελεστής του αγνώστου x είναι ο $\alpha = |\lambda| + 1$ και ο σταθερός όρος της εξίσωσης ο $\beta = |\lambda|^2 - 1 = (|\lambda| - 1)(|\lambda| + 1)$.

Όμως για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow |\lambda| + 1 \geq 1 > 0$.

Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο $\alpha = |\lambda| + 1 \neq 0$, έτσι η εξίσωση έχει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, μοναδική λύση ως προς x , την

$$(|\lambda| + 1) \cdot x = |\lambda|^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{(|\lambda| + 1) \cdot x}{(|\lambda| + 1)} = \frac{(|\lambda| - 1)(|\lambda| + 1)}{(|\lambda| + 1)} \Leftrightarrow x = |\lambda| - 1$$

άρα η λύση της εξίσωσης: $x = |\lambda| - 1$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ.1.2. Για να απέχει η λύση αυτή από τον αριθμό 3, απόσταση που δεν ξεπερνά το 2, άρα:

$$\begin{aligned} d(x, 3) \leq 2 &\Leftrightarrow |x-3| \leq 2 \Leftrightarrow ||\lambda| - 1 - 3| \leq 2 \Leftrightarrow ||\lambda| - 4| \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 \leq |\lambda| - 4 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + 4 \leq |\lambda| \leq 4 + 2 \Leftrightarrow 2 \leq |\lambda| \leq 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\lambda| \leq 6 \\ \text{και} \\ |\lambda| \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -6 \leq \lambda \leq 6 \\ \text{και} \\ \text{ή } \lambda \leq -2 \text{ ή } \lambda \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda \in [-6, -2] \cup [2, 6] \end{aligned}$$

Γ2. έχουμε τις ευθείες

$$e_1 : y = (\mu^2 - 4)x + \mu + 1, \quad \mu \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$e_2 : y = (-\mu^2 + 4\mu - 3)x + 2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της e_1 είναι ο $\alpha_1 = \epsilon\phi\omega_1 = \mu^2 - 4$, όπου ω_1 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία e_1 με τον άξονα $x'x$, ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της e_2 είναι $\alpha_2 = \epsilon\phi\omega_2 = -\mu^2 + 4\mu - 3$ όπου ω_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία e_2 με τον άξονα $x'x$.

Για να σχηματίζει η ευθεία e_1 αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$ δηλαδή: $90^\circ < \omega_1 < 180^\circ$ πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της e_1 , να είναι αρνητικός δηλαδή $\alpha_1 = \epsilon\phi\omega_1 < 0$, άρα $\alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \mu \in (-2, 2)$

$$\begin{array}{c|ccccccc} \mu & -\infty & & -2 & & 2 & & +\infty \\ \hline \mu^2 - 4 & & + & \text{Ο} & - & \text{Ο} & + & \end{array}$$

Για να σχηματίζει η ευθεία e_2 οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$ δηλαδή: $0^\circ < \omega_2 < 90^\circ$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της e_2 να είναι θετικός δηλαδή $\alpha_2 = \epsilon\phi\omega_2 > 0$, άρα $\alpha_2 > 0 \Leftrightarrow -\mu^2 + 4\mu - 3 > 0 \Leftrightarrow \mu \in (1, 3)$

$$\begin{array}{c|ccccccc} \mu & -\infty & & -1 & & 3 & & +\infty \\ \hline -\mu^2 + 4\mu - 3 & & - & \text{Ο} & + & \text{Ο} & - & \end{array}$$

Έτσι για να σχηματίζουν η e_1 αμβλεία γωνία με τον $x'x$ και η e_2 οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει να βρούμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 < 0 \\ \text{και} \\ \alpha_2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu \in (-2, 2) \\ \text{και} \\ \mu \in (1, 3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mu \in (1, 2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Αφού η ακολουθία $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος θα ισχύει ότι:

$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, άρα για $n = 7$ θα έχουμε:

$\alpha_7 = \alpha_1 + (7 - 1)\omega = \alpha_1 + 6\omega$ δίνεται όμως ότι $\alpha_7 = -11$, άρα

$\alpha_1 + 6\omega = -11 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6 \cdot (-2) = -11$ έτσι $\alpha_1 = 12 - 11 = 1$, οπότε ο

$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega = 1 + 3(-2) = -5$, οπότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_1$, λαμβάνει τη μορφή $f(x) = x^2 - 5x + 1$.

Δ.2. Και η αντίστοιχη εξίσωση $f(x) = 0$ γίνεται $x^2 - 5x + 1 = 0$ έτσι για τις ρίζες x_1, x_2 της $x^2 - 5x + 1 = 0$ θα έχουμε από τους τύπους Vieta:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5}{1} = 5 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Τότε:

$$A = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 5$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$B = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{5^2 - 1}{1} = 23$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt{400(x_1 + x_2) - 2012x_1 x_2 + 12}} = \sqrt[3]{\sqrt{400 \cdot 4 - 2012 \cdot 1 + 12}}$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt{2000 - 2012 + 12}} = 0$$

Δ.3. Η εξίσωση: $|x^2 - B - 2| + |x - A| = \Gamma$ με βάση τα παραπάνω θα έχουμε :

$$|x^2 - 23 - 2| + |x - 5| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 25| + |x - 5| = 0$$

Όμως $|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ και $b = 0$.

Έτσι $|x^2 - 25| + |x - 5| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$ και $x - 5 = 0$ και η κοινή λύση των δύο εξισώσεων είναι η $x = 5$.