Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 66.

Β. Σχολικό βιβλίο ορισμός, σελίδα 132.

Γ. **i) Σ** **ii) Λ** **iii) Σ** **iv) Σ** **v) Λ**

ΘΕΜΑ 2ο

α) $x^2 - 4x + 3 = 0 \ (1)$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$

$(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 3).$

β) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + 8$, έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 = 4$ και ρίζες $x = \dfrac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 4)$.

Το πρόσημο του τριωνύμου, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε, ότι: $2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (2, 4)$.

γ) $(x^{10} + 1)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) \geq 0 \ (2)$

Η παράσταση $x^{10} + 1$ είναι θετική για κάθε $x \in R$, διότι: $x^{10} \geq 0 \Rightarrow x^{10} + 1 > 0$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ προκύπτει εύκολα, δεδομένου ότι από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες του, άρα εκτός των ριζών θα είναι θετικό και εντός των ριζών αρνητικό.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 6x + 8$ έχει βρεθεί στον πίνακα του β) ερωτήματος.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πρόσημο της παράστασης $(x^{10} + 1)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x + 3)$.

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$x^{10}+1$		+		+		+		+		+	
x^2-6x+8		+		+	0	−		−	0	+	
x^2-4x+3		+	0	−		−	0	+		+	
Γινόμενο		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε, ότι:
(2) $\Leftrightarrow$ $(x\leq 1$ ή $2\leq x\leq 3$ ή $x\geq 4)\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 3$^{\text{o}}$

$x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0\,(1)$

α) $\Delta=\lambda^2-12\lambda=\lambda(\lambda-12)$
Η (1) έχει δύο άνισες ρίζες, άρα $\Delta>0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-12)>0\Leftrightarrow(\lambda<0$ ή $\lambda>12)$.
Το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda(\lambda-4)$ προκύπτει εύκολα, δεδομένου ότι οι ρίζες του είναι 0 και 12, άρα εκτός των ριζών θα είναι θετικό.

β) Για $\lambda=-4$: $x^2+4x-12=0\,(1')$

i) Το γινόμενο των ριζών ισούται με $\frac{\gamma}{\alpha}$, άρα $x_1\cdot x_2=\frac{-12}{1}=-12<0$, άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.
Παρατήρηση Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις ρίζες 2 και –6, που ασφαλώς είναι ετερόσημες.

ii) Η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός και η ρίζα x_2 είναι αρνητικός, επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη, δεδομένου ότι ένας μη αρνητικός δεν είναι δυνατόν να είναι μικρότερος ή ίσος από έναν αρνητικό.

iii) Η $(1')$, έχει διακρίνουσα $\Delta=\lambda(\lambda-12)=(-4)(-16)=64$
Οι ρίζες της είναι: $x=\frac{-4\pm 8}{2}=\begin{cases}2\\-6\end{cases}$, επομένως, $x_1=2$ και
$\sqrt[3]{x_1\sqrt{x_1}}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2 2}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[2\cdot 3]{2^3}=\sqrt{2}$.

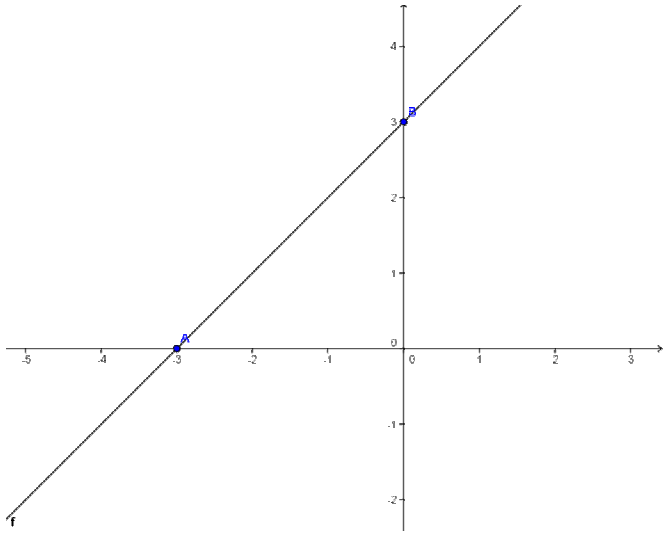
ΘΕΜΑ 4$^{\text{o}}$

α) Για να σχηματίζει, η ευθεία με εξίσωση $y=\left(|\lambda|-\frac{1}{2}\right)x+3$, γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η κλίση της να ισούται με εφ$45^{\circ}=1$.

Δηλαδή απαιτούμε να ισχύει:

$|\lambda| - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\lambda = \frac{3}{2}$ ή $\lambda = -\frac{3}{2})$.

β) **i)** Για $\lambda = \frac{3}{2}$ έχουμε f(x) = x+3 της οποίας η γραφική παράσταση είναι η ευθεία με εξίσωση y = x + 3.



Αν y = 0 είναι x = –3, ενώ αν x = 0 είναι y = 3.
Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α(–3,0) και τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0,3)
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

<u>Α΄ τρόπος</u>

ii) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι της μορφής f(x) = αx+β, με α = 1 > 0. Επομένως ο συντελεστής του x στον τύπο της συνάρτησης f είναι θετικός πραγματικός αριθμός, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) Για κάθε πραγματικό αριθμό α, ισχύει: $\alpha^2 > -1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha^2) > f(-1)$.

<u>Β΄ τρόπος</u>

ii) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Επομένως δείξαμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) $f(\alpha^2) > f(-1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 3 > 2 \Leftrightarrow \alpha^2 > -1$
Η τελευταία είναι αληθής για κάθε πραγματικό αριθμό α, αφού το πρώτο μέλος ως τετράγωνο πραγματικού είναι μη αρνητικός.
Συνεπώς, λόγω των ισοδυναμιών, αληθεύει και η αρχική.