



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
3/06/2026**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(Ενδεικτικές απαντήσεις)**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 133
A2. Διατύπωση θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελίδα 51
A3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 185
A4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

Άρα $\boxed{x \geq 2}$ και $\sqrt{x-2}+1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 2}$

Επομένως $A_{f \circ g} = (2, +\infty)$ και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = 2 \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) = \ln(x-2)$$

B2. Έχουμε $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = 2 + e^y, y \in \mathbb{R}$$

Επομένως $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$

B3. Για το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ υπολογίζουμε πρώτα

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = -\infty,$

Αφού αν θέσουμε $u = x-2$ τότε όταν $x \rightarrow 2$ έχουμε $u \rightarrow 0^+$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln(x-2) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln u = -\infty$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ θα ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \ell, \ell \in \mathbb{R}$ **(1)**

Αν $\kappa \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \kappa > 0 \\ \text{ή} & \text{σε κάθε} \\ -\infty, & \text{αν } \kappa < 0 \end{cases}$

περίπτωση άτοπο λόγω της **(1)**

Άρα $\boxed{\kappa = 0}$

Για $\kappa = 0$ σε κάθε περίπτωση και ανεξάρτητα από την τιμή του μ το όριο είναι μηδέν άρα πραγματικός αριθμός .

Αφού η $y = x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $O(0,0)$ θα ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

Η $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$ ικανοποιεί την σχέση $f(0) = 0$

Βρίσκουμε την παράγωγο της f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2+1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2+1)^2} \text{ και } f'(0) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\mu = 1}$$

Γ2. (i) Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$ έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ και $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο της f' είναι το πρόσημο του $-x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$ αφού $(x^2+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	○	+	○	-
$f(x)$		↘	↗	↘	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$

Στη θέση $x = -1$ έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ενώ στη θέση $x = 1$ έχει

τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{2}$

(ii) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$ άρα

$$f(A_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [-1, 1]$ άρα

$$f(A_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [1, +\infty)$ άρα

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right) = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

Ισχύει $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha = 0$

Η μέγιστη τιμή της f είναι το $\frac{1}{2}$ ενώ η μικρότερη τιμή της παράστασης $\alpha^2 + \frac{1}{2}$ είναι το $\frac{1}{2}$ επομένως μόνο όταν $\alpha = 0$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$ έχει μία μόνο ρίζα την $x = 1$ ενώ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ η εξίσωση $f(x) = \alpha^2 + \frac{1}{2}$ είναι αδύνατη

Γ3.

$$\begin{aligned} I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \\ &= \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

Για $v = 0$ έχουμε $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$

Ισχύει : $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$

Για $v = 0$ έχουμε $I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

Για $v = 1$ έχουμε $I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = g(x) + x, x \in \mathbb{R}$

Η h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

(η g παραγωγίσιμη άρα και συνεχής)

$$h(-1) = g(-1) - 1 < 0, \text{ αφού } 0 < g(x) < 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$h(0) = g(0) > 0, \text{ αφού } 0 < g(x) < 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως $h(-1) \cdot h(0) < 0$, άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_1 \in (-1, 0) \text{ τέτοιο ώστε } h(x_1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{g(x_1) + x_1 = 0}$$

Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδικό

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και επειδή η g' συνεχής θα είναι και η h' συνεχής στο \mathbb{R} οπότε θα διατηρεί πρόσημο .

Άρα σε κάθε περίπτωση η h είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1 οπότε το x_1 μοναδικό .

$$\Delta 2. f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Αφού η f παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{ από όπου προκύπτει εύκολα ότι } f(0) = 0$$

$$\text{Η } g \text{ παραγωγίσιμη στο } x = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{D.L.H}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \kappa \right) = 3 - \kappa$$

Λόγω της (1) προκύπτει $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ3.(i) Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3$

$$f''(x) = -2\eta\mu x + \frac{2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} = -2\eta\mu x + \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = \frac{-2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^3 x + 2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = \frac{2\eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu^3 x)}{\sigma\upsilon\nu^3 x} > 0$$

για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ αφού $\sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\eta\mu x > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$$1 - \sigma\upsilon\nu^3 x > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

και η f παραγωγίσιμη στο 0 οπότε $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Η f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 0$ επομένως

$x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και λόγω του ότι $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) \geq 0$ για

$$\text{κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(ii) Η εξίσωση $3f(x) = \pi$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \frac{\pi}{3}$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Αρχικά υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) = +\infty$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 2\eta\mu x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (-3x) = -\frac{3\pi}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\varepsilon\phi x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty$$

διότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 0$ και όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $\sin x > 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$

Άρα $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A έχουμε

$f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = [0, +\infty)$, Ο αριθμός $\frac{\pi}{3} \in f(A)$ άρα υπάρχει $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ το οποίο είναι μοναδικό αφού η f 1-1 στο A

Δ4. (i) Επαναφέρουμε την συνάρτηση του Δ1 $h(x) = g(x) + x$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 h(x)$ είναι μη αρνητική στο διάστημα $[x_1, 0]$, επειδή $x^2 \geq 0$ θα ασχοληθούμε με την $h(x)$

Ισχύει ότι $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και επειδή η g' συνεχής θα είναι και η h' συνεχής στο \mathbb{R} οπότε θα διατηρεί πρόσημο.

Ισχύει $h(0) > 0$ και $h(-1) < 0$ δηλαδή $h(0) > h(-1)$ και επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι η h γνησίως αύξουσα

Οπότε $x > x_1 \Leftrightarrow h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0$ άρα $f(x) = x^2 h(x) \geq 0$ για κάθε

$x \in [x_1, 0]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στα άκρα

Β τρόπος

Η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x_1, 0]$ άρα υπάρχει

$\xi \in (x_1, 0)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(0) - h(x_1)}{0 - x_1} = \frac{h(0)}{-x_1} > 0$ άρα αφού διατηρεί πρόσημο θα

ισχύει $h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[x_1, \frac{\pi}{3} \right]$ τότε $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$

$$\text{και ισχύει } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \quad (1)$$

Παίρνουμε το κάθε μέλος της (1) ξεχωριστά

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 f(x) dx &= \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \\ &= \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3} \right)' g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = \left[\frac{x^3}{3} g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} \\ &= \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx \end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Άρα από την (1) έχουμε :

$$-\frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$

Σχόλιο : $g(x_1) + x_1 = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = -x_1$

Β τρόπος

Αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $\left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$ τότε $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$

$$\text{και ισχύει } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \quad (1)$$

Παίρνουμε το κάθε μέλος της (1) ξεχωριστά

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει :

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \boxed{\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}}$$

Για το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε :

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \left[x^3 g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = \left[x^3 g(x) \right]_{x_1}^0 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx$$

$$= -x_1^3 g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx =$$

$$= x_1^4 - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \right) = x_1^4 - 3 - 3 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{3x_1^4}{4} = -3 - 3 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{x_1^2}{4}$$