ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 76

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 104

Α3. **α)** Ο ισχυρισμός της πρότασης είναι Ψευδής. (Σχολικό βιβλίο σελ. 136)

β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η παράγωγος της δεν είναι αναγκαστικά θετική. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ που δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0)=0$. (Σχολικό βιβλίο σελ. 136)

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $D_f=(1,+\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της $f\circ g$ είναι:

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } e^x\in(1,+\infty)\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } e^x>1\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } e^x>e^0\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ και } x>0\}=(0,+\infty) \text{ και } (f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{e^x+2}{e^x-1}$$

Β2. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$(f\circ g)'(x)=\left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)'=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-\left(e^x+2\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεπώς είναι και "1–1". Η $f\circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών

$$(f\circ g)((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x),\lim_{x\to0^+}(f\circ g)(x)\right)=(1,+\infty)$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\overset{u=e^x}{=\!=}\lim\limits_{u\to1^+}\dfrac{u+2}{u-1}=+\infty$

Άρα η $f\circ g$ ορίζεται στο $(1,+\infty)$ και $y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-e^x=y+2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(y-1)e^x=y+2\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow\ln e^x=\ln\frac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\frac{y+2}{y-1}$$

Τελικά $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1}$ με $x\in(1,+\infty)$

Β3. Η $\varphi(x)=\ln\frac{x+2}{x-1}$ με $x>1$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{1}{x+2}\cdot\frac{-3}{x-1}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0$$ για

κάθε $x>1$. Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\frac{x+2}{x-1}\ \underset{x\to1^+\Rightarrow u\to+\infty}{\overset{\text{Θέτω } u=\frac{x+2}{x-1}}{=\!=\!=}}\ \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ $\left(\text{αφού } \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty\right)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+2}{x-1}\ \underset{x\to+\infty\Rightarrow u\to1}{\overset{\text{Θέτω } u=\frac{x+2}{x-1}}{=\!=\!=}}\ \lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ $\left(\text{αφού } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\right)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο IR, οπότε θα είναι και συνεχής στο 0. Συνεπώς $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=0+\lambda=\lambda$

Πρέπει: $1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0$. Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το $\lambda=1$.

Έστω η συνάρτηση $g(\lambda)=\ln\lambda+\lambda-1,\ \lambda>0$. Είναι $g'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+1>0$ για κάθε $\lambda>0$, οπότε η g είναι γν. αύξουσα άρα και "1-1" και συνεπώς η ρίζα $\lambda=1$ είναι μοναδική.

Γ2. Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$

- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}+\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1+0=1$

Οπότε $f'(0)=1$

Γ3. Για κάθε $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=-\frac{(1-x)'}{(1-x)^2}=-\frac{-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

Για κάθε $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

Επίσης ισχύει $f'(0)=1$, άρα $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}, & x\le0\\ \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, τα κρίσιμα σημεία της είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία μηδενίζεται η παράγωγός της.

Για κάθε $x<0$ είναι: $f\,'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(1-x)^2}=0$ Αδύνατη

Για κάθε $x>0$ είναι: $f\,'(x)=0 \Leftrightarrow συνx-ημx=0 \Leftrightarrow συνx=ημx \Leftrightarrow εφx=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{π}{4}$ ή $x=\dfrac{5π}{4}$ $\left(\text{αφού } 0<x<\dfrac{3π}{2}\right)$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $\left(\dfrac{π}{4},\sqrt{2}\right)$ και $\left(\dfrac{5π}{4},-\sqrt{2}\right)$

Γ4. Για $x\le 0$ η f είναι $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Η εφαπτομένη της C_f στη θέση Μ είναι: $y-f(α)=f\,'(α)(x-α)$.

Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β, που προκύπτει για $y=0$:

$-f(α)=f\,'(α)(x-α) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{1-α}=\dfrac{1}{(1-α)^2}(x-α) \Leftrightarrow -1+α=x-α \Leftrightarrow x=2α-1$ άρα

$B(2α-1,0)$, δηλαδή $x(t)=2α(t)-1$ και $x'(t)=2α'(t)$

Δίνεται $α'(t)=-\dfrac{α(t)}{3}$ και την χρονική στιγμή t_0 είναι $α(t_0)=-1$, συνεπώς:

$x'(t)=2α'(t) \Leftrightarrow x'(t)=-\dfrac{2α(t)}{3}$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε: $x'(t_0)=-\dfrac{2α(t_0)}{3}=-\dfrac{2(-1)}{3}=\dfrac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $f\,'(x)=\left(e^x+x^2-ex-1\right)'=e^x+2x-e$ και $f\,''(x)=e^x+2>0$

Επομένως η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα άρα "1-1".

- Η $f\,'$ είναι συνεχής στο [0,1]
- $f\,'(0)=1-e<0$ και $f\,'(1)=e+2>0$ άρα $f\,'(0)\cdot f\,'(1)<0$

Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την $f\,'$ στο [0,1] και υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f\,'(x_0)=0$ και επειδή η $f\,'$ είναι 1-1 το x_0 είναι μοναδικό. Συνεπώς:

για $x>x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\,'(x)>f\,'(x_0) \Leftrightarrow f\,'(x)>0$ και για $x<x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\,'(x)<f\,'(x_0) \Leftrightarrow f\,'(x)<0$

και επειδή η f συνεχής στο x_0 τελικά η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0.

Όμως $f\,'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ επομένως

$f(x_0)=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$

Δ2. Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε: $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ και επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = f(x_0) - f(x_0) = 0$ διότι η f είναι συνεχής στο x_0 τελικά

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$$

Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε: $ημ\dfrac{1}{x - x_0} \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\dfrac{1}{x - x_0} \geq \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$

Όμως $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$ επομένως $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\dfrac{1}{x - x_0} \right) = +\infty$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + x - x_0$, $x \in [x_0, 1]$.

- Η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $h(x_0) = f(x_0) + x_0 - x_0 = f(x_0) < 0$ διότι $x_0 < 1 \overset{f \nearrow [x_0, +\infty)}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$

  $h(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $ρ \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(ρ) = 0 \Leftrightarrow f(ρ) + ρ - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(ρ) + ρ = x_0$

Είναι επίσης $h'(x) = f'(x) + 1 > 1$ διότι για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η h είναι γν. αύξουσα και συνεπώς "1-1" και άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ έχει μοναδική ρίζα ρ στο $(x_0, 1)$.

Δ4. Η ζητούμενη ανίσωση γίνεται

$f(x_0) > f(ρ)\left(f'(k) + 1\right) \Leftrightarrow f(x_0) > f(ρ)f'(k) + f(ρ) \Leftrightarrow f(x_0) - f(ρ) > f(ρ)f'(k)$ (1)

Αφού το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης έχουμε $f(ρ) + ρ = x_0 \Leftrightarrow f(ρ) = x_0 - ρ$, οπότε:

$$(1) \Leftrightarrow f(x_0) - f(ρ) > (x_0 - ρ)f'(k) \overset{x_0 - ρ < 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0) - f(ρ)}{x_0 - ρ} < f'(k)$$

Η f είναι συνεχής στο $[x_0, ρ]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, ρ)$, άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (x_0, ρ)$ τέτοιο ώστε: $f'(ξ) = \dfrac{f(x_0) - f(ρ)}{x_0 - ρ}$

Ισχύει $x_0 < ξ < ρ < k < 1$ και από το Δ1 η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα $f'(ξ) < f'(k) \Leftrightarrow \dfrac{f(x_0) - f(ρ)}{x_0 - ρ} < f'(k)$ για κάθε $k \in (ρ, 1)$