

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (α,β)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

Μονάδες 7

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$ , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$ ».

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$  για κάθε  $v \in \mathbb{N}$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

**δ)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

**ε)** Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ , του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = e^x$$

**B1.** Να προσδιορίσετε την συνάρτηση  $f \circ g$ .

Μονάδες 5

**B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ , με  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

**B3.** Αν  $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

**B4.** Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda > 0$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

Μονάδες 5

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0,1)$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

Μονάδες 6

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 6

**Γ4.** Ένα σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$  με  $\alpha \leq 0$  κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$ . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  δίνεται από τον τύπο  $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$ .

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $B$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία το σημείο  $M$  έχει τετμημένη 1.

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0,1)$  στην οποία η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

Μονάδες 7

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

όπου  $x_0$  το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

**Δ3.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + x = x_0$  για  $x \in (x_0, 1)$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ .

Μονάδες 5

**Δ4.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και  $\rho$  είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι  $f(x_0) > f(\rho)(f'(\rho) + 1)$  για κάθε  $k \in (\rho, 1)$ .

Μονάδες 7