

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** α) Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 15
β) i. Η συνάρτηση έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο A.
ii. Αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία για κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.
- A2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 142
- A3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 135
- A4.** α) Λάθος. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$
Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο A.
β) Λάθος. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$
Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \neq f(0) = 2$.
- A5.** Σωστό το γ.

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$
- B2.** Έστω η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$
Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με: $h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1.
Η h είναι συνεχής στο $[2, 3] \subseteq \mathbb{R}$
• $h(2) = e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} > 0$
• $h(3) = e^{-3} - 3 + 2 = e^{-3} - 1 < 0$, διότι $e^{-3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^3} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^3$ που ισχύει
Επομένως $h(2) \cdot h(3) < 0$ και από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2, 3)$ κι αφού η h είναι 1-1 είναι μοναδική.

B3. Είναι $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = \mathbb{R}$ άρα έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = 2, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty$$

$$\text{Για } x \in \mathbb{R} \text{ και } y \in (2, +\infty) \text{ είναι: } y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow$$

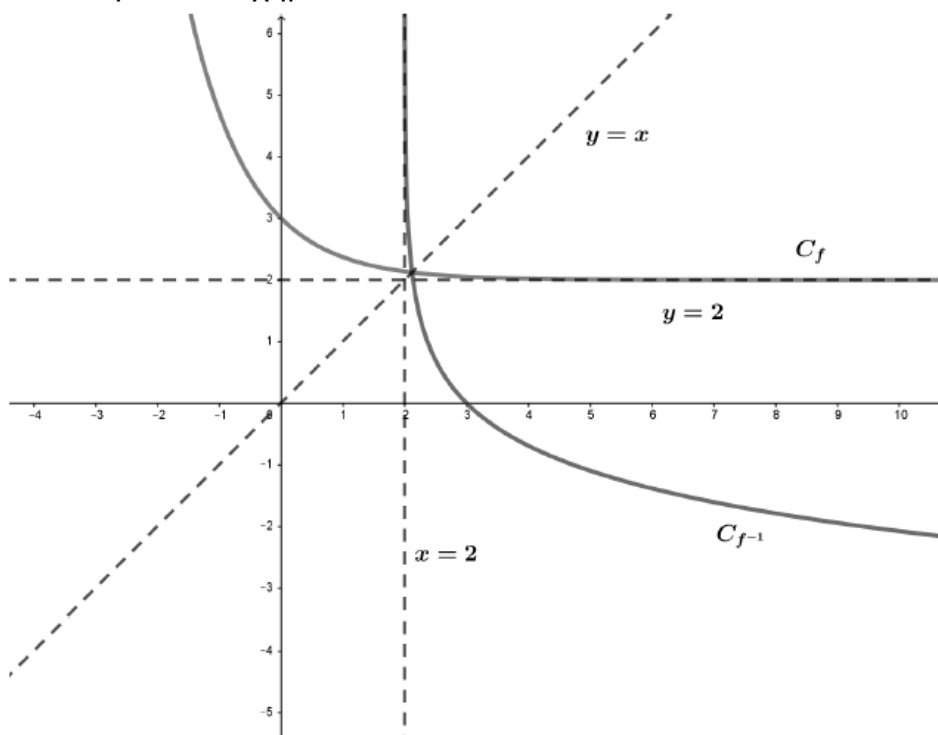
$$\Leftrightarrow \ln(y - 2) = \ln e^{-x} \Leftrightarrow \ln(y - 2) = -x \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2)$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x \in (2, +\infty)$$

B4. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] \stackrel{u=x-2}{\underset{x \rightarrow 2^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+}{=}} \lim_{u \rightarrow 0^+} [-\ln(u)] = -(-\infty) = +\infty$

Άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης e^{-x} είναι συμμετρική της e^x ως προς τον άξονα $y'y$. Οπότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα πάνω της e^{-x} . Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ άρα και συνεχής στο $x_0 = 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ (1)

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = e^0 + \beta = 1 + \beta$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha$
- $f(1) = 1 + \alpha$

Άρα λόγω της (1) έχουμε: $1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (2)

Επειδή f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}$ (3)

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{\alpha=\beta}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta)'}{(x - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = e^0 + \beta = 1 + \beta \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

Άρα λόγω της (3) έχουμε: $1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$, οπότε λόγω της (2) είναι $\alpha = 1$

Γ2. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1, & x < 1 \end{cases}$

- Για $x \geq 1$ είναι $2x \geq 2 > 0$, οπότε η f είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$
- Για $x < 1$ είναι $e^{x-1} + 1 > 1 > 0$, οπότε η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$
- Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, διότι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = 0 + (-\infty) = -\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1}) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$

Γ3. i. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 0)$, οπότε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right). \text{ Το } 0 \in f(A_1) \text{ συνεπώς η εξίσωση } f(x) = 0$$

έχει αρνητική ρίζα x_0 η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Για $x \in (x_0, +\infty)$ είναι: $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0$

- $x > x_0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- $f(x) > 0$ και $x_0 < 0 \Leftrightarrow -x_0 > 0$, οπότε $f(x) - x_0 > 0$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη $f(x)(f(x) - x_0) > 0$, συνεπώς η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Για $x \geq 1$ έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}(OK)(KM) = \frac{1}{2}|x||f(x)| = \frac{1}{2}x(x^2 + 1) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$$

Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου είναι:

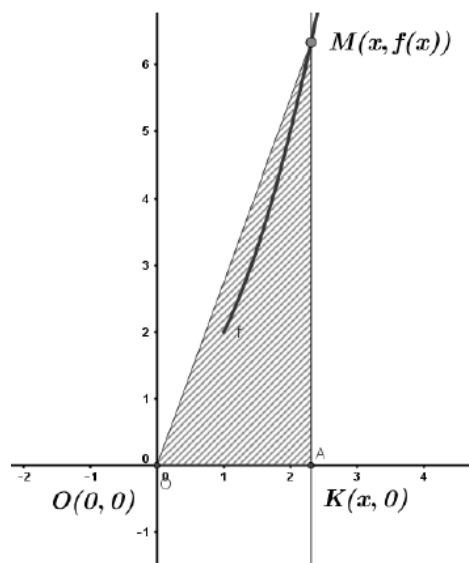
$$E(t) = \frac{1}{2}(x^3(t) + x(t))$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2}(3x^2(t)x'(t) + x'(t))$$

Για $t = t_0$ είναι $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$ οπότε:

$$\begin{aligned} E'(t_0) &= \frac{1}{2}(3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)) = \\ &= \frac{1}{2}(3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2) = \frac{1}{2}56 = 28 \text{ cm}^2/\text{sec} \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha, \text{ οπότε:}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \ln 1 + \frac{0}{1} + \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Δ2. Είναι $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$ και $E = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)| dx =$

$$= \int_1^2 |(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2| dx = \int_1^2 |(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)| dx$$

Για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι $(x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$, διότι $x-1 \geq 0$ και

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 \text{ άρα } \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0, \text{ οπότε:}$$

$$E = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

$$\text{Θέτουμε } u = x^2 - 2x + 2, \text{ άρα } du = (2x-2)dx \Leftrightarrow du = 2(x-1)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}du = (x-1)dx$$

Για $x = 1 \Rightarrow u = 1$ και για $x = 2 \Rightarrow u = 2$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } E &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1 \ln 1) - \frac{1}{2} [x]_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} 2 \ln 2 - \frac{1}{2} (2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Δ3. i. Είδαμε ότι: $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$

Έχουμε:

$$f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

που ισχύει, αφού $(x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0$ και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$

ii. Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$, οπότε από το

$$\text{Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda}$$

$$\text{Όμως από ερώτημα Δ3.ι. ισχύει: } f'(\xi) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

Δ4. Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ τα σημεία επαφής της κοινής εφαπτομένης των C_f και C_g αντίστοιχα. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων σε αυτά είναι:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - x_1 f'(x_1) \text{ και}$$

$$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

Αυτές πρέπει να ταυτίζονται, άρα:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_1) = -3x_2^2 - 1 & (1) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) & (2) \end{cases}$$

Όμως $f'(x_1) \geq -1$ (από Δ3.ι) και $-3x_2^2 - 1 \leq -1$, οπότε για να ισχύει η (1) πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2) = -1$

$$\bullet f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln[(x_1 - 1)^2 + 1] + \frac{2(x_1 - 1)^2}{(x_1 - 1)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$\bullet g'(x_2) = -1 \Leftrightarrow -3x_2^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow -3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ επαληθεύεται η (2), αφού $f(1) - f'(1) = g(0) - 0 \cdot g'(0) \Leftrightarrow 2 = 2$

Τέλος για $x_1 = 1$ έχουμε: $y = f'(1) \cdot x + f(1) - 1 \cdot f'(1) \Leftrightarrow y = -x + 1 - (-1) \Leftrightarrow y = -x + 2$