ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

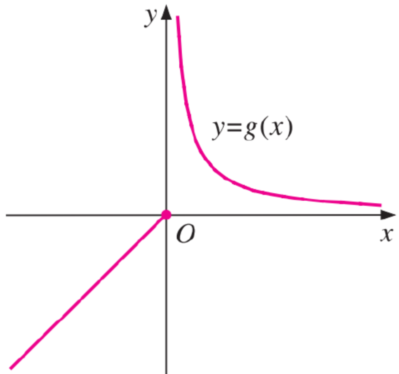
Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 99

Α2. α. Ψευδής

β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 35

Για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$

είναι "1-1" αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη (διπλανό σχήμα).



(σχήμα από το σχολικό βιβλίο)

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 216

Α4. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη IR* ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f\,'(x)=1+\frac{4\left(x^2\right)'}{x^4}=1+\frac{4\cdot 2x}{x^4}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3} \text{ για κάθε } x\in \text{IR*}.$$

$$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

$$f\,'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}>0 \Leftrightarrow \left(x^3+8\right)x^3>0$$

Για να βρούμε το πρόσημο της $f\,'(x)$ σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3+8		$-$	0	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε η μονοτονία της f είναι:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f\,'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↗	-3 τ.μ.	↘	‖	↗

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $(0,+\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $A(-2,-3)$

Β2. Η f΄ είναι παραγωγίσιμη IR* ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f\,''(x)=\left(1+\dfrac{8}{x^3}\right)'=-\dfrac{8\cdot 3x^2}{x^6}=-\dfrac{24}{x^4}$ για κάθε $x\in$ IR*.

Επειδή $f\,''(x)<0$ για κάθε $x\in$ IR* η συνάρτηση f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. ● Θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} x-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{4}{x^2}=0-(+\infty)=-\infty$, διότι $\dfrac{4}{x^2}>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4}{x^2}=0-(+\infty)=-\infty$, διότι $\dfrac{4}{x^2}>0$

Άρα η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$

● Θα αναζητήσουμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1-0=1$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1-0=1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$

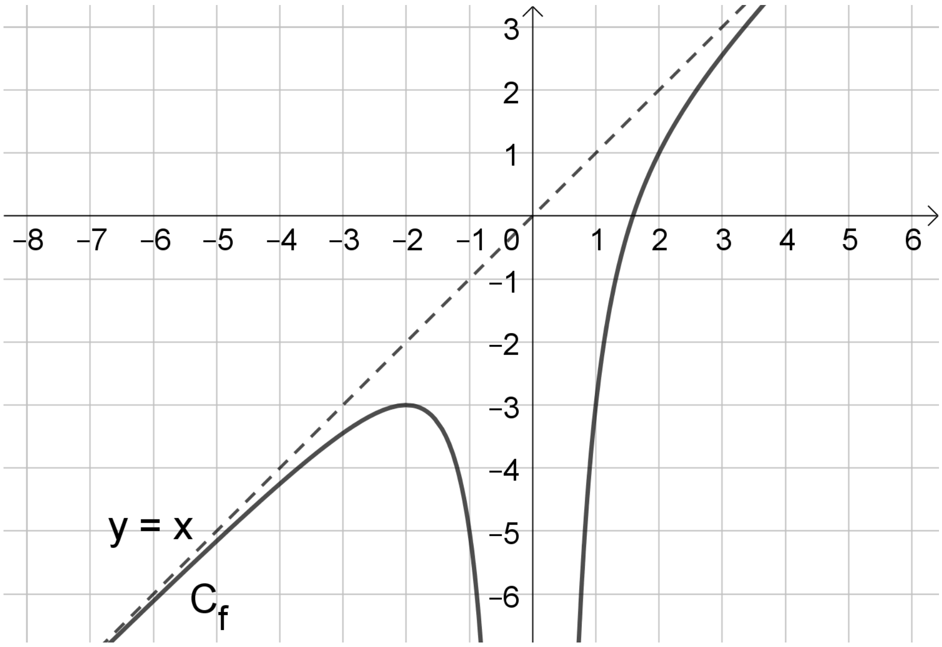
Β4. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty-0=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=+\infty-0=+\infty$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f\,'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f\,''(x)$	$-$		$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-3 τ.μ.	↘	‖	↗ $+\infty$

και την ακόλουθη γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x m, οπότε η πλευρά του θα είναι $\frac{x}{4}$. Επειδή το x παριστάνει μήκος πρέπει να είναι $x > 0$ αλλά και $x < 8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0 < x < 8$. Επομένως το εμβαδό του τετραγώνου είναι $\frac{x^2}{16}$.

Με το υπόλοιπο του σύρματος το οποίο είναι $8 - x$ κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος: $L = 2\pi\rho \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$ m

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν: $E = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4\left(64 - 16x + x^2\right)}{16\pi} = \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} =$$

$$= \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0,8)$$

Γ2. Η E(x) είναι παραγωγίσιμη στο (0,8) ως πολυωνυμική με

$$E'(x) = \frac{2(\pi+4)x - 64}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x - 32}{8\pi},\ x \in (0,8)$$

x	0 $\qquad \frac{32}{\pi+4}$ $\qquad 8$
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ τ.ε. $\nearrow$

- $E'(x)=0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32=0 \Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$
- $E'(x)>0 \Leftrightarrow (\pi+4)x-32>0 \Leftrightarrow x>\frac{32}{\pi+4}$

Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν $x=\frac{32}{\pi+4}$ m και τότε:

- Η πλευρά του τετραγώνου είναι: $\frac{x}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{32}{\pi+4}=\frac{8}{\pi+4}$ m
- Η διάμετρος του κύκλου είναι: $\delta=2\rho=2\cdot\frac{8-x}{2\pi}=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8(\pi+4)-32}{\pi(\pi+4)}=$

$=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)}=\frac{8\pi}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}$ m

δηλαδή το εμβαδόν ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση στο $(0,8)$.

- Η συνάρτηση Ε είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$, οπότε

$$E(A_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left[\frac{1}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

- Η συνάρτηση Ε είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$, οπότε

$$E(A_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\frac{1}{\pi+4},4\right)$$

Επειδή $5\in E(A_1)$ και $5\notin E(A_2)$ και η συνάρτηση Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1, τότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in A_1$, ώστε: $E(x_0)=5\ m^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}=2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}=e^0 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2>0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}>2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha}>e^0 \Leftrightarrow x-\alpha>0 \Leftrightarrow x>\alpha$

Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$ $\quad \alpha \quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	$\frown$ $2-\alpha^2$ Σ.Κ. $\smile$

Άρα:
- η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$
- η f είναι κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$
- η f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $A\left(\alpha,2-\alpha^2\right)$

Δ2. • Η f' είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$, οπότε $f'(\Delta_1) = \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right) = [2-2\alpha, +\infty)$, διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha} - 2x\right) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

• Η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$, οπότε $f'(\Delta_2) = \left[f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = [2-2\alpha, +\infty)$, διότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{2e^{x-\alpha}}{x} - 2\right)\right] = (+\infty)(+\infty - 2) = +\infty \text{, αφού}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x-\alpha}}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2e^{x-\alpha}\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} 2e^{x-\alpha} = +\infty$$

Επειδή $0 \in f'(\Delta_1)$ και $0 \in f'(\Delta_2)$, (αφού $\alpha < 1 \Leftrightarrow 2\alpha < 2 \Leftrightarrow 2\alpha - 2 < 0$) και η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2 τότε υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2 με $x_1 < \alpha < x_2$, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- Αν $x < x_1 < \alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
- Αν $x_1 < x < \alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

επομένως η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_1

- Αν $\alpha < x < x_2 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Αν $\alpha < x_2 < x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x_2) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

επομένως η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_2

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_1)$ Τ.Μ.		$\searrow$		$f(x_2)$ Τ.Ε.	$\nearrow$	

Δ3. Είναι $x_1 < 1$, γιατί αν $x_1 \ge 1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x_1) \le f'(1) \Leftrightarrow f'(1) \ge 0$ που είναι άτοπο αφού για κάθε $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1-\alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < e^0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} < 2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 2 < 0 \Leftrightarrow f'(1) < 0$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, \alpha]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_2]$, τότε:

$$1 < \alpha < x < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1) > f(\alpha) > f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(1) > f(x)$$

άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Για $\alpha = 2$ η f γίνεται: $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$

Η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ και στο $x_0 = 2$ η εφαπτομένη της C_f είναι η ευθεία $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y + 2 = -2(x-2) \Leftrightarrow y + 2 = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 2$

Επομένως: $f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$, για κάθε $x \geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$, οπότε:

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$ (1)

Θέτουμε $u = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow u^2 = x - 2 \Leftrightarrow x = u^2 + 2$, $dx = 2udu$

Για $x = 2 \Rightarrow u = 0$ και για $x = 3 \Rightarrow u = 1$, άρα;

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = \int_0^1 \left[-2\left(u^2+2\right)+2\right]u \cdot 2udu = \int_0^1 \left(-2u^2 - 4 + 2\right)2u^2du =$$

$$= \int_0^1 \left(-2u^2 - 2\right)2u^2du = \int_0^1 \left(-4u^4 - 4u^2\right)du = \left[-\frac{4u^5}{5} - \frac{4u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{32}{15}$$

Άρα τελικά η (1) γίνεται: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$