

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 135

A2. α. Ψευδής

β. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο x_0 . Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 73

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f(x) = \ln x$ με $D_f = (0, +\infty)$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$ με $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

Η $f \circ g$ ορίζεται όταν

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ και } \frac{x}{1-x} \in (0, +\infty) \right\} = \\ = \{ x \neq 1 \text{ και } x(1-x) > 0 \} = \{ x \neq 1 \text{ και } x \in (0, 1) \} = (0, 1) \neq \emptyset$$

Άρα ορίζεται η $f \circ g$ με τύπο $(f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} > 0 \quad \text{για}$$

κάθε $x \in (0, 1)$. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ επομένως είναι και "1-1", άρα η h είναι αντιστρέψιμη.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της h έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \xrightarrow[\text{Θέτουμε } u = \frac{x}{1-x}]{x \rightarrow 0^+ \text{ τότε } u \rightarrow 0^+} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \xrightarrow[\substack{\text{Θέτουμε } u = \frac{x}{1-x} \\ x \rightarrow 1^- \text{ τότε } u \rightarrow +\infty}]{\substack{\text{Θέτουμε } u = \frac{x}{1-x} \\ x \rightarrow 1^- \text{ τότε } u \rightarrow +\infty}} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, 1)$ είναι $h(A) = \mathbb{R}$

Η αντίστροφη h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο: $y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^y - xe^y = x \Leftrightarrow e^y = x + xe^y \Leftrightarrow e^y = (1 + e^y)x \xrightarrow{e^y + 1 > 0} x = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

Τελικά $h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ με $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

B3. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

Η φ' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

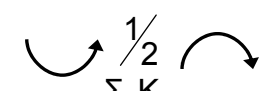
$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \frac{e^x \cdot (e^x + 1)^2 - e^x \cdot 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{(e^x + 1)[e^x \cdot (e^x + 1) - e^x \cdot 2e^x]}{(e^x + 1)^4} = \\ &= \frac{e^{2x} + e^x - 2e^{2x}}{(e^x + 1)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^3} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\bullet \varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\bullet \varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\bullet \varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$			

Άρα:

• η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$

• η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$

• η f έχει σημείο καμπής στο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B4. Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

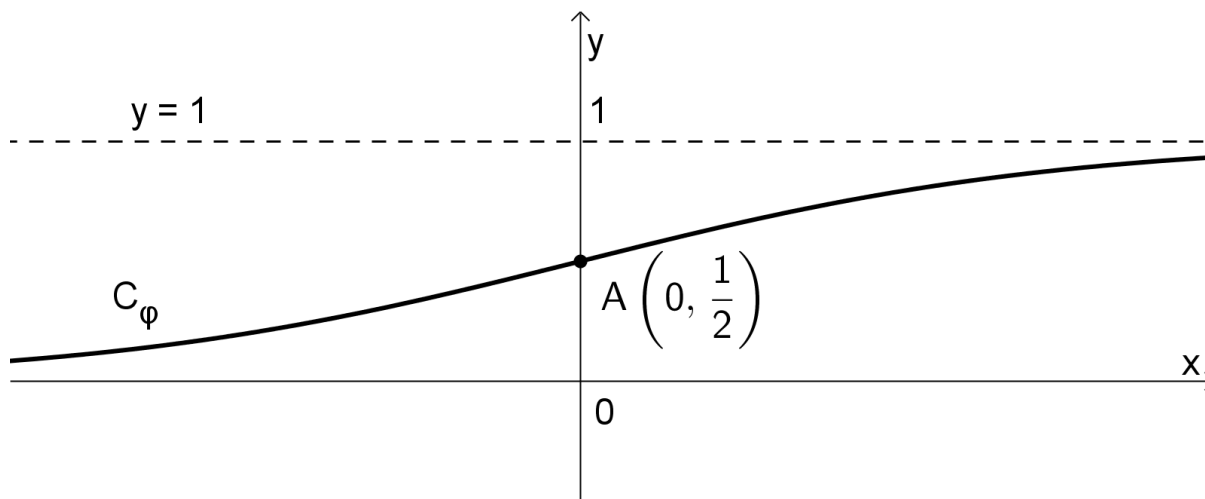
$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\substack{+\infty \\ -\infty \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+		+
$\varphi''(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	0 ↗	$\frac{1}{2}$ Σ.Κ.	↘ 1

και την ακόλουθη γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x) = -\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το

$A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο M είναι;

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 (x - x_0) \quad (\epsilon)$$

$$\text{Επειδή } A \in (\epsilon): -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \eta\mu x_0 + \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

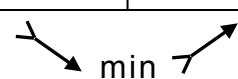
$$\text{Έστω η συνάρτηση } g(x) = \eta\mu x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}, \quad x \in [0, \pi]$$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = g(\pi) = 0$, οπότε η $g(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $g'(x) = \sin x - \sin x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-\eta\mu x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$.

$$\text{Είναι: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \pi$$

$$\text{Επίσης } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x > 0 \stackrel{\substack{\eta\mu x > 0 \\ x \in [0, \pi]}}{\Leftrightarrow} x - \frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$			

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $0 \in \Delta_1$

οπότε η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 την $x_1 = 0$

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και

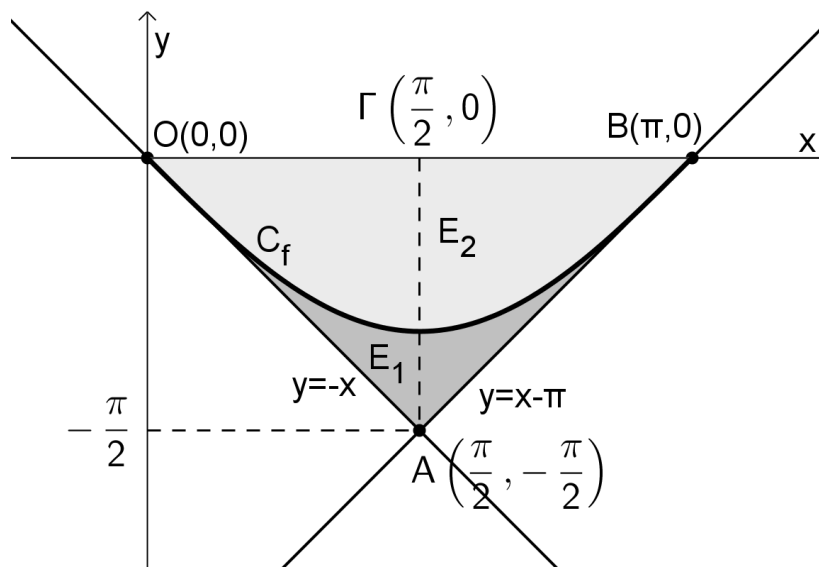
$\pi \in \Delta_2$, οπότε η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2 την $x_2 = \pi$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $[0, \pi]$ και συνεπώς δύο ακριβώς εφαπτομένες (ε_1) , (ε_2) της C_f άγονται από το A , οι οποίες είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$$

$$(\varepsilon_2): y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi$$

Γ2. Για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει: $\eta\mu x \geq 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$



$$\text{Επομένως } E_2 = \int_0^{\pi} |f(x)| dx = -\int_0^{\pi} f(x) dx = -\int_0^{\pi} \eta\mu x dx = -[\sin x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2 \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι: } E_{OAB} = \frac{1}{2} (OB)(\Gamma A) = \frac{1}{2} \pi \left| -\frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi^2}{4} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Συνεπώς } E_1 = E_{OAB} - E_2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ και } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} \stackrel{x \in [0, \pi]}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = -\eta\mu x - x + \pi$, $x \in [0, \pi]$

Η h είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $h'(x) = -\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

Για κάθε $0 < x < \pi \stackrel{h \downarrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(\pi) \Leftrightarrow h(x) > 0$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (-\eta\mu x + x) \cdot \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} = \pi \cdot (+\infty) = +\infty$$

Γ4. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f''(x) = \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$ και η εφαπτομένη της C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi, 0)$.

Άρα για κάθε $x \in [1, \varepsilon] \subset (0, \pi)$ ισχύει $f(x) > \varepsilon_2 \Leftrightarrow f(x) > x - \pi \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$

$$\text{Άρα } \int_1^{\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^{\varepsilon} \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx = \left[x - \pi \ln|x|\right]_1^{\varepsilon} = \varepsilon - \pi - 1 + 0 = \varepsilon - 1 - \pi$$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.**
- Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων
 - Η f είναι συνεχής στο $(0, \pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
 - Για $x = 0$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \eta\mu x) = 0$ και $f(0) = 0$

Άρα τελικά η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη ή ισχύει $f'(x) = 0$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' \stackrel{x < 0}{=} \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)' = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = (e^x \eta\mu x)' = e^x \eta\mu x + e^x \sigma\upsilon\nu x = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

- Για $x = 0$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}\right) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και συνεπώς έχει στο 0 κρίσιμο σημείο.

Επίσης: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$, αφού $x \in (0, \pi)$ που είναι επίσης κρίσιμο σημείο.

Τελικά τα κρίσιμα σημεία της f στο $[-1, \pi]$ είναι τα $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{3\pi}{4}$

Δ2. Οι ρίζες και το πρόσημο της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	-		+	-
$f(x)$	1 τ.μ.	0 min	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$ max	0 min

Άρα:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{3\pi}{4}]$
- η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο

$(-1, 1)$, ολικό μέγιστο στο σημείο $(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}})$ και ολικό ελάχιστο στα σημεία $(0, 0)$ και $(\pi, 0)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. η f έχει σύνολο τιμών το $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}]$

Δ3. Είναι $E = \int_0^\pi |f(x) - e^{5x}| dx = \int_0^\pi |e^x \eta\mu x - e^{5x}| dx$ (1)

Ισχύει: $e^x \eta\mu x - e^{5x} = e^x (\eta\mu x - e^{4x})$

Για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $x \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{4x} \geq 1 \geq \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x - e^{4x} \leq 0$,
 οπότε η (1) γίνεται: $E = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \eta\mu x) dx = \int_0^\pi e^{5x} dx - \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx$ (2)

$$\bullet \int_0^\pi e^{5x} dx = \left[\frac{1}{5} e^{5x} \right]_0^\pi = \frac{1}{5} e^{5\pi} - \frac{1}{5} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

$$\bullet I = \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx = \int_0^\pi (e^x)' \eta\mu x dx = [e^x \eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (\eta\mu x)' dx = 0 - 0 - \int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= -\int_0^\pi (e^x)' \sigma\upsilon\nu x dx = -[e^x \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x (\sigma\upsilon\nu x)' dx = e^\pi + e^0 - \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx =$$

$$= e^\pi + 1 - I, \text{ άρα } I = e^\pi + 1 - I \Leftrightarrow 2I = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\text{Τελικά η (2) γίνεται: } E = \int_0^\pi e^{5x} dx - \int_0^\pi e^x \eta\mu x dx = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2}$$

Δ4. Είναι $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 16f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{16} \Leftrightarrow f(x) - \left(\frac{4x - 3\pi}{4} \right)^2 = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \quad (3)$$

Αλλά επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$ ισχύει

$$f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \leq 0 \text{ και η (3) γίνεται;}$$

$$\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{3\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$