

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 262-263

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 141

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 246

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\swarrow$	0 min	$\nearrow$

Άρα:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- η f έχει ελάχιστο (ολικό) στο $O(0,0)$

B2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2+1)(x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

και συνεπώς έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
f''(x)	-	0	+	0	-
f(x)		$\frac{1}{4}$ Σ.Κ.		$\frac{1}{4}$ Σ.Κ.	

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

Άρα:

- η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

- η f είναι κοίλη στα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

- η f έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$

B3. Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

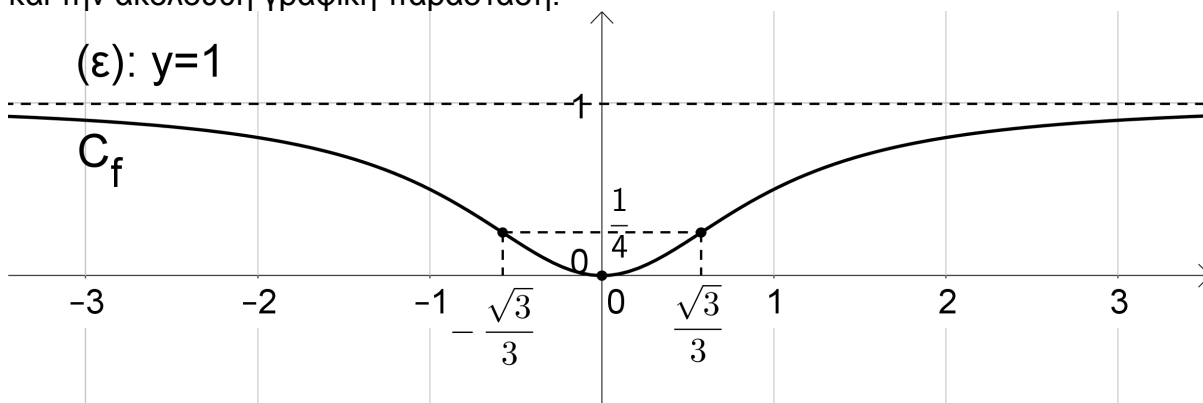
Συνεπώς η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού έχει οριζόντια.

B4. Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	0
$f(x)$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ $\frac{1}{4}$ Σ.Κ.	$\searrow$ 0 min	$\nearrow$ $\frac{1}{4}$ Σ.Κ.	$\nearrow$ 1

και την ακόλουθη γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$. Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ e^{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \text{ και}$$

επειδή $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)		0 min	

Η f έχει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Άρα ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$ και συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Γ2. Από την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ έχουμε ισοδύναμα $|f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1|$ και επειδή

(από ερώτημα Γ1) $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ τελικά έχουμε: $|f(x)| = e^{x^2} - x^2 - 1$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως:

- Αν $x \in (-\infty, 0)$ και $f(x) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

- Αν $x \in (-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως:

- Αν $x \in (0, +\infty)$ και $f(x) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

- Αν $x \in (0, +\infty)$ και $f(x) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

Άρα έχουμε τους ακόλουθους συνδυασμούς για τον τύπο της f

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1), x \in \mathbb{R} \quad \text{ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = 2(e^{x^2} - 1) + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2$

Ισχύει ότι: $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow 2e^{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow 2e^{x^2} - 2 \geq 0$ και επειδή $4x^2 e^{x^2} \geq 0$ τελικά έχουμε $f''(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x+3) - f(x)$ στο $[0, +\infty)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) = f'(x+3)(x+3)' - f'(x) = f'(x+3) - f'(x)$

Ισχύει $x < x+3 \xRightarrow{f' \nearrow}_{[0, +\infty)} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0$, οπότε $g'(x) > 0$ και

συνεπώς η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1-1".

Η αρχική εξίσωση λοιπόν γίνεται:

$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow g(|\eta\mu x|) = g(x) \xRightarrow{g:1-1} |\eta\mu x| = x \Leftrightarrow x = 0$ επειδή από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από τη σχέση $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx = \pi$ ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x \, dx &= \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) \eta \mu x \, dx + \int_0^\pi f''(x) \eta \mu x \, dx = \pi \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) (-\sigma \upsilon \nu x)' \, dx + \int_0^\pi (f'(x))' \eta \mu x \, dx = \pi \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow [-f(x) \sigma \upsilon \nu x]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \sigma \upsilon \nu x \, dx + [f'(x) \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \sigma \upsilon \nu x \, dx = \pi \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -f(\pi) \sigma \upsilon \nu \pi + f(0) \sigma \upsilon \nu 0 + f'(\pi) \eta \mu \pi - f'(0) \eta \mu 0 = \pi \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)
 \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 0$.

Από τη δοσμένη σχέση $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$, θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{\eta \mu x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \eta \mu x$ με

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. Οπότε: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \eta \mu x) = 1 \cdot 0 = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ τελικά $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

Από την (1) τελικά έχουμε: $f(\pi) + f(0) = \pi \Leftrightarrow f(\pi) = \pi$

Για το $f'(0)$ έχουμε: $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$

Δ2. α) Έστω ότι η f έχει ακρότατο στη θέση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ από το θεώρημα Fermat έχουμε: $f'(x_0) = 0$ (2)

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$(e^{f(x)} + x)' = (f(f(x)) + e^x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$$

Για $x = x_0$ γίνεται: $e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$, οπότε από την (2) έχουμε: $f'(0) = 0$ ΑΤΟΠΟ, διότι $f'(0) = 1$

Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

β) Επειδή η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη και επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον επειδή $f'(0) = 1 > 0$ άρα $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, έχουμε:

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty), \text{ δηλαδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Ισχύει: } \left| \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{1+1}{f(x)} \right| = \left| \frac{2}{f(x)} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{2}{f(x)} \right| \leq \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)} \leq \left| \frac{2}{f(x)} \right|$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{2}{f(x)} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{2}{f(x)} \right| = 0, \text{ από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)} = 0.$$

Δ4. Έχουμε: $1 \leq x \leq e^\pi \xrightarrow{\ln x} \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e^\pi \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq \pi \xrightarrow{f} f(0) \leq f(\ln x) \leq f(\pi) \xrightarrow{x>0} \Leftrightarrow 0 \leq f(\ln x) \leq \pi \xrightarrow{x>0} 0 \leq \frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi}{x}$

- $\frac{f(\ln x)}{x} \geq 0$

Το $\frac{f(\ln x)}{x}$ για $x = e^\pi$ παίρνει τιμή $\frac{f(\pi)}{e^\pi} = \frac{\pi}{e^\pi} \neq 0$, άρα δεν είναι παντού μηδέν,

οπότε $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx > 0$

- $\frac{f(\ln x)}{x} \leq \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow \frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x} \leq 0$

Για $x = 1$ η $\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x}$ παίρνει τιμή $\frac{f(1)}{1} - \frac{\pi}{1} = 0 - \pi = -\pi \neq 0$, άρα δεν είναι παντού

μηδέν, οπότε $\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx - \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x} dx < 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x} dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi [\ln x]_1^{e^\pi} \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \ln e^\pi \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

Άρα τελικά $0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$