

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 194

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 188

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 259

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε: $|z - 4| = 2|z - 1| \Leftrightarrow |z - 4|^2 = 4|z - 1|^2 \Leftrightarrow (z - 4)(\bar{z} - 4) = 4(z - 1)(\bar{z} - 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

B2. α) Ισχύει: $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$ και ομοίως $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$, οπότε:

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2 \cdot \frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2 \cdot \frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w, \text{ δηλαδή ο } w \text{ είναι πραγματικός.}$$

β) Έχουμε: $|z_1| = |z_2| = 2$ οπότε $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$, $\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 1$ και συνεπώς

$$|w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq 2 \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 2 \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow |w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4$$

B3. Αφού $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow -4 = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Leftrightarrow -4 = \frac{2z_1^2 + 2z_2^2}{z_1 \cdot z_2} \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_1z_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1$$

Άρα έχουμε τις εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ στο μιγαδικό επίπεδο, ώστε:

$$(ΑΓ) = |z_3 - z_1| = |2iz_1 - z_1| = |z_1| \cdot |2i - 1| = 2\sqrt{1+4} = 2\sqrt{5} \text{ και}$$

$$(ΒΓ) = |z_3 - z_2| = |2iz_1 + z_1| = |z_1| \cdot |2i + 1| = 2\sqrt{1+4} = 2\sqrt{5} = (ΑΓ)$$

συνεπώς το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και το ίσον}$$

ισχύει μόνο για $x=1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \cdot 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Γ2. Έχουμε: $f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x} \cdot (x^2+1)) = f(2) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} e^{3-x} \cdot (x^2+1) = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{3-x}}{2} = \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot e^{3-x}}{2} = \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Επειδή όμως $\frac{e^3}{2} \in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \frac{e^3}{2}$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Για $0 < 2x < t < 4x \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(t) < f(4x) \Leftrightarrow f(4x) - f(t) > 0 \Rightarrow \int_{2x}^{4x} [f(4x) - f(t)] dt > 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(4x) dt - \int_{2x}^{4x} f(t) dt > 0 \Leftrightarrow f(4x) \int_{2x}^{4x} dt > \int_{2x}^{4x} f(t) dt \Leftrightarrow f(4x) [t]_{2x}^{4x} > \int_{2x}^{4x} f(t) dt \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(4x)(4x - 2x) > \int_{2x}^{4x} f(t) dt \Leftrightarrow 2xf(4x) > \int_{2x}^{4x} f(t) dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$

Γ4. Εξετάζουμε την συνέχεια της g στο $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_{2x}^0 f(t) dt + \int_0^{4x} f(t) dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2f(2x) + 4f(4x)}{1} =$$

$= -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 = g(0)$, άρα η g είναι συνεχής στο $x=0$ και επειδή για $x > 0$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών, τελικά είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$

Επίσης είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = \left(\frac{\int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x} \right)' = \frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t) dt \right)' \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2} = \frac{(-2f(2x) + 4f(4x)) \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t) dt}{x^2} =$$

$$= \frac{-2xf(2x) + 4xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} = \frac{(-2xf(2x) + 2xf(4x)) + (2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt)}{x^2}$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$0 < 2x < 4x \xrightarrow{f \nearrow} f(2x) < f(4x) \Leftrightarrow -f(2x) + f(4x) > 0 \xrightarrow{2x > 0} -2xf(2x) + 2xf(4x) > 0$ και από το Γ3 έχουμε: $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$, οπότε τελικά $g'(x) > 0$, δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής στο $[0, +\infty)$ τελικά είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$, οπότε από γνωστό θεώρημα έχουμε: $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$.

Για $x = 0$: $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow c = 0$ και τελικά:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \xrightarrow{\cdot e^{f(x)}} e^{2f(x)} - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \xrightarrow{+x^2} \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |e^{f(x)} - x| = \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

Επειδή $\sqrt{x^2 + 1} \neq 0$ άρα και η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - x \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών, άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή επιπλέον $g(0) = e^{f(0)} - 0 = e^0 = 1 > 0$, τελικά $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (1) λοιπόν γίνεται: $e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln e^{f(x)} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$$

Δ2. α) Έχουμε: $f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -\frac{\frac{2x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}}{\frac{x}{x^2 + 1}} = -\frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{\frac{x}{x^2 + 1}} = -\frac{2}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Είναι: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

β) Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$ άρα η εφαπτομένη της είναι πάντα πάνω από τη C_f με εξαίρεση το $O(0,0)$, δηλαδή ισχύει $f(x) \leq x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f(x)			

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned}
 E(\Omega) &= \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 \left(x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 (x)' \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \text{ τ.μ.}
 \end{aligned}$$

Δ3. Από το Δ2α) έχουμε: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και συνεπώς $|f(x)| = f(x)$

Η $f^2(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$ άρα η $\int_0^x f^2(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \cdot x \ln f(x) \right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x) \right) \stackrel{f^2 \text{ συνεχής στο } 0}{=} e^0 \cdot f^2(0) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 f'(x)}{f(x)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \stackrel{f' \text{ συνεχής στο } 0}{=} -f'(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{f(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2)'}{f'(x)} = \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{f'(x)} = - \frac{0}{1} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά: } L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{x} \cdot x \ln f(x) \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

Δ4. Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x - 2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right) + (x - 3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right)$, $x \in [2, 3]$

• Η g είναι συνεχής στο $[2, 3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$g(2) = - \left(8 - 3 \int_0^2 f^2(t) dt \right) = -8 + 3 \int_0^2 f^2(t) dt$$

Από το Δ3 έχουμε: $f(x) \leq x$ για $x \geq 0$ και $f(x) < x$ για $x > 0$.

Άρα $f^2(t) \leq t^2 \Leftrightarrow f^2(t) - t^2 \leq 0$ για κάθε $t \in [0, 2]$ και αφού η $h(t) = f^2(t) - t^2$ είναι συνεχής και όχι παντού μηδέν στο $[0, 2]$ έχουμε:

$$\int_0^2 (f^2(t) - t^2) dt < 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt - \int_0^2 t^2 dt < 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \int_0^2 t^2 dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3 \int_0^2 f^2(t) dt < 8 \Leftrightarrow -8 + 3 \int_0^2 f^2(t) dt < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(2) < 0$$

Όμοια $g(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt$ και όπως πριν $f(x) \leq x$ για $x \geq 0$, οπότε

$f(t^2) \leq t^2 \Leftrightarrow f(t^2) - t^2 \leq 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$ και αφού η $\varphi(t) = f(t^2) - t^2$ είναι συνεχής και όχι παντού μηδέν στο $[0, 1]$ έχουμε:

$$\int_0^1 (f(t^2) - t^2) dt < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt - \int_0^1 t^2 dt < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(t^2) dt < 1 \Leftrightarrow 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(3) > 0$$

Τελικά έχουμε: $g(2) \cdot g(3) < 0$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ και ισοδύναμα η εξίσωση

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0 \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } (2, 3).$$