

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ
ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b) , τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (a, b) για $x = x_0$.
- β)** Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- γ)** Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
- δ)** Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων A και B ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα B εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα A .
- ε)** Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B » δηλώνει ότι $A \subseteq B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω A, B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A, A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $(3x - 1)(8x^2 - 6x + 1) = 0$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $9x^2 - 3x - 2 = 0$

B1. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' - B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Μονάδες 6

B4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου $f_i\%$, $i=1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108° .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$.

Κλάσεις	$f_i\%$
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 10$, $f_3\% = 30$, $f_4\% = 20$, $f_5\% = 30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.
Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \approx 2,57$.

Μονάδες 7

- Γ3.** Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα και v_1, v_2, v_3 και v_4 οι συχνότητες της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780$, βρείτε το πλήθος n των παρατηρήσεων του δείγματος.

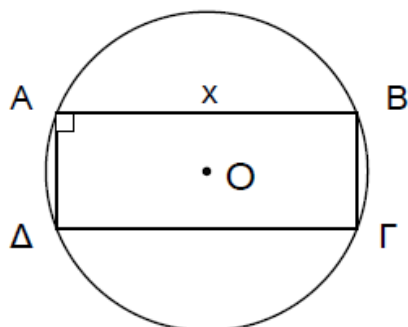
Μονάδες 5

- Γ4.** Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα n παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση. Εάν $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$, για $i = 1, 2, 3, 4, 5$, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος β_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB = x$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 4

- Δ2.** Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

- Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$

Μονάδες 8

- Δ4.** Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A-B) > 0$, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$

Μονάδες 8