

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2015
ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ)
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α **A2.** β **A3.** α **A4.** δ

A5. α. Λάθος β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

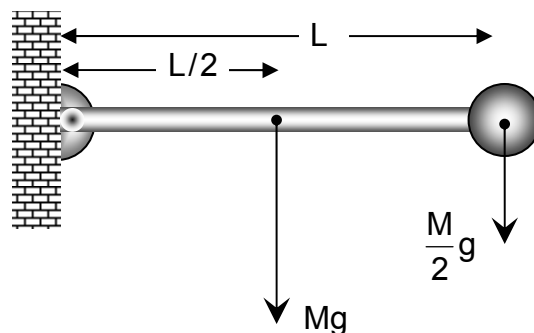
B1. Σωστό είναι το (iii)

$$I_{ολ} = I + \frac{M}{2}L^2 = \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{2}ML^2 \Rightarrow \boxed{I_{ολ} = \frac{5}{6}ML^2}$$

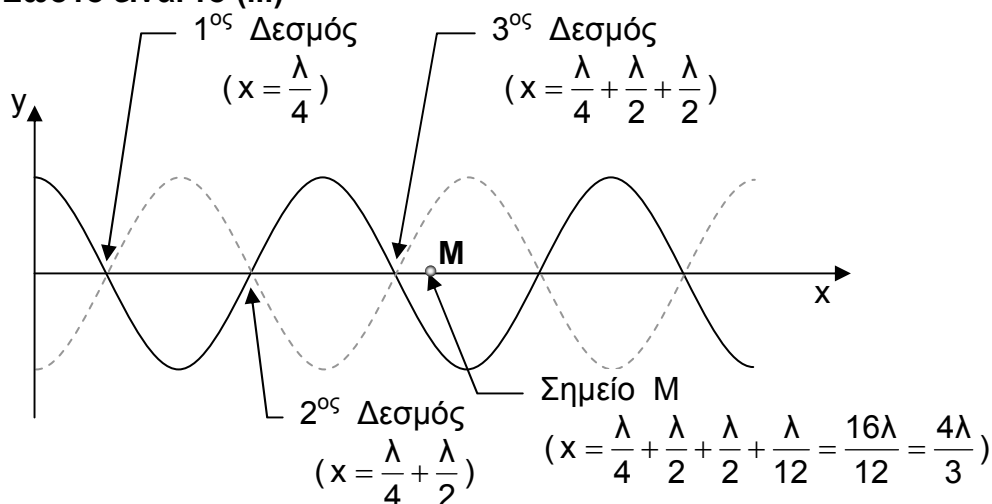
$$\Sigma \tau = I_{ολ} \alpha_y \Rightarrow Mg \frac{L}{2} + \frac{Mg}{2}L = \frac{5}{6}ML^2 \alpha_y \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_y = \frac{6g}{5L}}$$

$$\frac{\Delta L_p}{\Delta t} = I_p \alpha_y = \frac{1}{3}ML^2 \frac{6g}{5L} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta L_p}{\Delta t} = \frac{2}{5}MgL}$$



B2 Σωστό είναι το (iii)

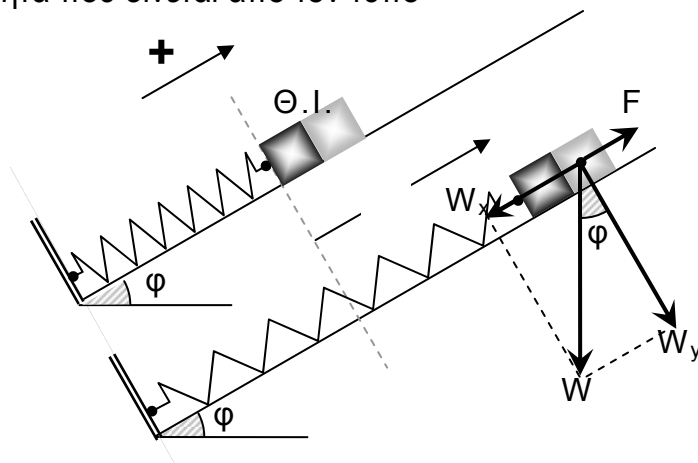


$$A' = \left| 2A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \right| = \left| 2A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{4\lambda}{3}\right) \right| = \left| 2A \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \right| = \left| 2A \sin\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right| \Rightarrow$$

$$A' = \left| 2A \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right| = 2A \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A' = A}$$

B3 Σωστό είναι το (i)

Όσο τα δύο σώματα βρίσκονται σε επαφή εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα που δίνεται από τον τύπο



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

Για το σώμα Σ_2 όσο βρίσκεται σε επαφή με το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_x = m_2 \vec{a} \Rightarrow F - m_2 g \eta \mu(\varphi) = -m_2 \omega^2 x \Rightarrow$$

$$F = m_2 g \eta \mu(\varphi) - m_2 \omega^2 x \Rightarrow$$

$$F = m_2 g \eta \mu(\varphi) - m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \Rightarrow$$

$$F = m_2 g \eta \mu(\varphi) - \frac{m_2 k}{m_1 + m_2} x$$

Για να βρίσκονται τα σώματα σε επαφή πρέπει $F > 0$,

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο της δύναμης F είναι για $x = A$

$$\text{Δηλαδή } F_{\min} = m_2 g \eta \mu(\varphi) - \frac{m_2 k}{m_1 + m_2} A$$

Αν εξασφαλίσουμε ότι για την ελάχιστη τιμή της F ισχύει $F_{\min} > 0$ τότε τα σώματα δεν χάνουν επαφή

Επομένως

$$F_{\min} > 0 \Rightarrow m_2 g \eta \mu(\varphi) - \frac{m_2 k}{m_1 + m_2} A > 0 \Rightarrow m_2 g \eta \mu(\varphi) > \frac{m_2 k}{m_1 + m_2} A \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2) g \cdot \eta \mu(\varphi) > kA$$

Θέμα Γ

- Γ1.** Στην ηλεκτρική ταλάντωση που γίνεται στο κύκλωμα διατηρείται η ενέργεια οπότε έχουμε:

$$U_E + U_B = E \Rightarrow U_E + \frac{1}{2} Li^2 = E \Rightarrow \boxed{U_E = E - \frac{1}{2} Li^2}$$

Από δεδομένα έχουμε:

$$U_E = 8 \cdot 10^{-2} (1 - i^2) \Rightarrow \boxed{U_E = 8 \cdot 10^{-2} - 8 \cdot 10^{-2} i^2}$$

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι

$$E = 8 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} Li^2 = 8 \cdot 10^{-2} i^2 \Rightarrow L = 0,16 \text{ H}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η ενέργεια ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow 8 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} C \cdot 40^2 \Rightarrow 8 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} C \cdot 1600 \Rightarrow C = 10^{-4} \text{ F}$$

$$\text{Τελικά η περίοδος είναι} \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{0,16 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow T = 8\pi \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

Γ2. Στην άσκηση δίνονται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος δηλαδή όταν $t = 0 \text{ s}$ $q = Q$ και $i = 0$ οπότε οι εξισώσεις που ισχύουν είναι

$$q = Q \cdot \sin(\omega t) \quad \text{και} \quad i = -I \cdot \eta\mu(\omega t)$$

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$ το φορτίο στον πυκνωτή είναι

$$q = Q \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow q = Q \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{12}\right) \Rightarrow q = Q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow q = Q \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου εκείνη τη στιγμή είναι

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{\left(Q \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{C} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow U_E = E \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_E = 8 \cdot 10^{-2} \frac{3}{4} \Rightarrow U_E = 6 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Γ3. Αναζητώ το φορτίο του πυκνωτή τη στιγμή που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή γίνεται τριπλάσια της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.
Δηλαδή:

$$U_E + U_B = E \Rightarrow U_E + \frac{U_E}{3} = E \Rightarrow \frac{4U_E}{3} = E \Rightarrow U_E = \frac{3}{4} E \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow q^2 = \frac{3}{4} Q^2 \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} Q$$

Ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου της έντασης του ρεύματος θα υπολογισθεί από τη

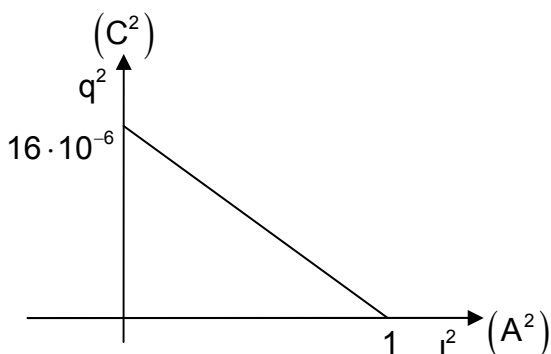
$$\text{σχέση} \quad V_L = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$$V_C = V_L \Rightarrow |V_C| = |V_L| \Rightarrow \left| \frac{q}{C} \right| = \left| -L \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = \frac{|q|}{LC} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = \frac{\left| \pm \frac{\sqrt{3}}{2} Q \right|}{LC} \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Q}{C L} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} V \frac{1}{L} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} 40 \frac{1}{0,16} \Rightarrow \left| \frac{\Delta i}{\Delta t} \right| = 125\sqrt{3} \frac{A}{s}$$

Γ4. Από τη διατήρηση της ενέργειας στο κύκλωμα της ηλεκτρικής ταλάντωσης έχουμε:

$$U_E + U_B = E \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 = E \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{q^2}{10^{-4}} + \frac{1}{2} 16 \cdot 10^{-2} i^2 = 8 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$$



$$U_E + U_B = E \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 = E \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{10^{-4}} + \frac{1}{2} 16 \cdot 10^{-2} i^2 = 8 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$$

$$10^4 q^2 + 16 \cdot 10^{-2} i^2 = 16 \cdot 10^{-2} \Rightarrow$$

$$10^4 q^2 = 16 \cdot 10^{-2} - 16 \cdot 10^{-2} i^2 \Rightarrow$$

$$q^2 = 16 \cdot 10^{-6} (1 - i^2) \text{ σε SI.}$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης είναι αυτή που φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα.

Θέμα Δ

- Δ1.** Όταν η μικρή σφαίρα βρίσκεται στη θέση (Γ) θεωρούμε ότι για το πολύ μικρό χρονικό διάστημα κινείται σε τμήμα κεκλιμένου επιπέδου. Η γωνία φ μεταφέρεται από παραλληλία και καθετότητες στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Στη θέση (Γ)

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow W_x - T = ma \Rightarrow$$

$$mg \sin(\varphi) - T = ma \quad (1)$$

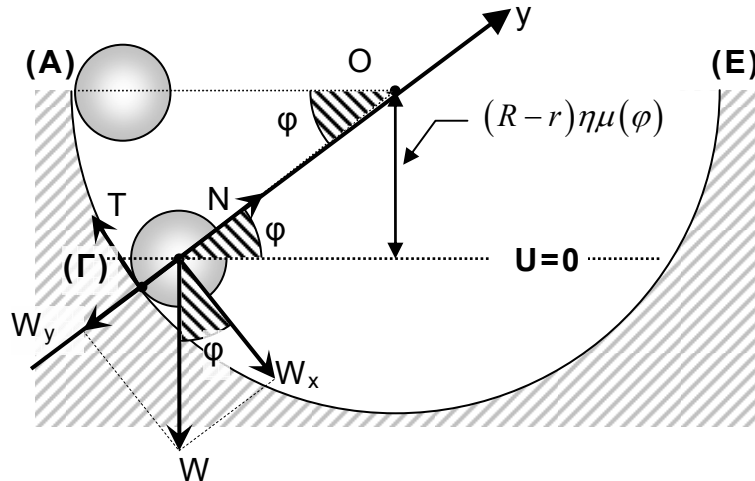
$$\Sigma \tau = I a_y \Rightarrow T r = I a_y \Rightarrow T = \frac{I}{r} a \Rightarrow T = \frac{I}{r^2} a \quad (2)$$

Αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

$$\Delta x = r \cdot \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow v = r \cdot \omega \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow a = r \cdot a_y \Rightarrow a_y = \frac{a}{r}$$

Την τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε για να φτάσουμε στη (2) σχέση.

$$(1), (2) \Rightarrow mg \sin(\varphi) - \frac{I}{r^2} a = ma \Rightarrow mg \sin(\varphi) = \left(m + \frac{I}{r^2} \right) a \Rightarrow \frac{mg \sin(\varphi)}{m + \frac{I}{r^2}} = a \quad (3)$$



$$\text{Από (2),(3)} \Rightarrow T = \frac{I}{r^2} \frac{mg \sin(\varphi)}{m + \frac{I}{r^2}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{I}{mr^2 + I} mg \sin(\varphi)}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία υπολογίζουμε την στατική τριβή

$$T = \frac{I}{mr^2 + I} mg \sin(\varphi) \Rightarrow T = \frac{\frac{2}{5}mr^2}{mr^2 + \frac{2}{5}mr^2} mg \sin(\varphi) = \frac{\frac{2}{5}mr^2}{\frac{7}{5}mr^2} mg \sin(\varphi) =$$

$$= \frac{2}{7} 1,4 \cdot 10 \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow \boxed{T = 4 \cdot \sin(\varphi) \text{ σε S.I.}}$$

- Δ2.** Επειδή η σφαίρα κινείται σε κυκλική τροχιά, στη θέση (Γ), η συνισταμένη δύναμη στο άξονα της ακτίνας είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση της σφαίρας είναι $\boxed{a_k = \frac{u^2}{R-r}}$

διότι η κυκλική κίνηση που εκτελεί το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει ακτίνα $R-r$

$$\Sigma F_y = ma_k \Rightarrow N - W_y = m \frac{u^2}{R-r} \Rightarrow N = W_y + m \frac{u^2}{R-r} \Rightarrow N = mg \cdot \eta\mu(\varphi) + m \frac{u^2}{R-r} \quad (4)$$

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας που έχει η σφαίρα στη θέση (Γ) εφαρμόζω Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ).

$$\text{ΑΔΜΕ : } K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow 0 + mg(R-r)\eta\mu(\varphi) = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow$$

$$mg(R-r)\eta\mu(\varphi) = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mr^2\omega^2 \Rightarrow mg(R-r)\eta\mu(\varphi) = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{2}{5} \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow$$

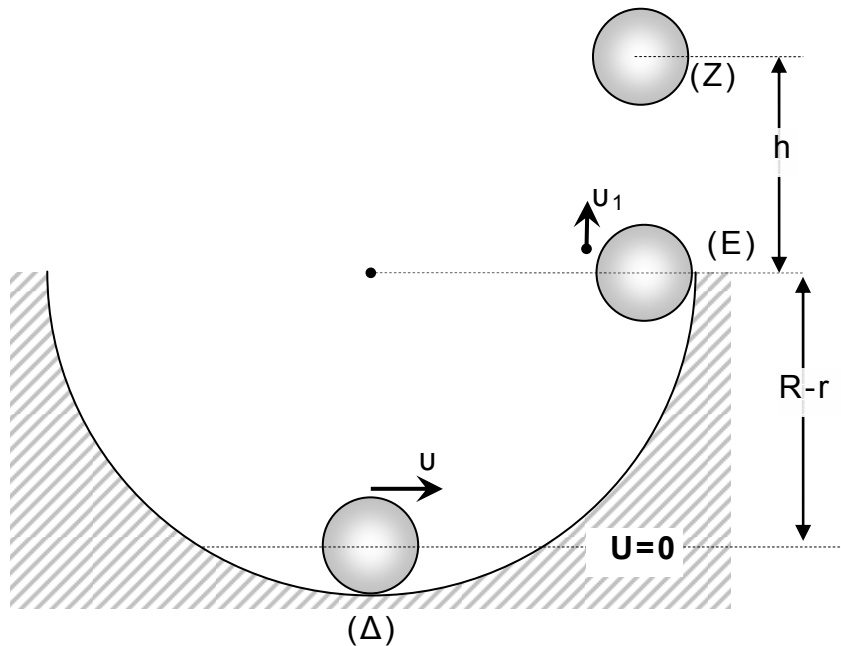
$$\cancel{m}g(R-r)\eta\mu(\varphi) = \frac{1}{2}\cancel{m}u^2 \left(1 + \frac{2}{5}\right) \Rightarrow u^2 = \frac{10}{7}g(R-r)\eta\mu(\varphi) \quad (5)$$

Από

$$(4),(5) \Rightarrow N = mg \cdot \eta\mu(\varphi) + m \frac{\frac{10}{7}g(R-r)\eta\mu(\varphi)}{R-r} \Rightarrow N = mg \cdot \eta\mu(\varphi) + \frac{10}{7}mg\eta\mu(\varphi) \Rightarrow$$

$$\boxed{N = \frac{17}{7}mg \cdot \eta\mu(\varphi)} \Rightarrow N = 17N$$

- Δ3.** Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας από τη θέση (Δ) έως τη θέση (Ε) υπολογίζουμε την ταχύτητα που έχει το κέντρο μάζας της σφαίρας στη θέση (Ε).



$$\text{ΑΔΜΕ}_{(\Delta) \rightarrow (E)} : K_{\Delta} + U_{\Delta} = K_E + U_E \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + mg(R-r) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega_1^2 + mg\left(R - \frac{R}{8}\right) \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{u^2 - \frac{10gR}{8}} \Rightarrow u_1 = 4 \frac{m}{s}$$

Όταν η σφαίρα χάσει την επαφή της με το ημισφαίριο παύει να ασκείται η στατική τριβή επομένως η συνολική ροπή που δέχεται είναι μηδέν έτσι διατηρείται η στροφική κινητική της ενέργεια από το (Ε) έως το (Ζ).

Για τον υπολογισμό του ύψους h εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας από τη θέση (Ε) έως τη θέση (Ζ).

$$\text{ΑΔΜΕ}_{(E) \rightarrow (Z)} : K_E + U_E = K_Z + U_Z \Rightarrow \frac{1}{2}mu_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}I\omega_1^2} + mg(R-r) = 0 + \cancel{\frac{1}{2}I\omega_1^2} + mg(R-r+h) \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{u_1^2}{2g}} \Rightarrow h = 0,8m.$$

- Δ4.** Όταν η σφαίρα χάσει την επαφή της από το ημισφαίριο επειδή παύει να ασκείται η τριβή η συνολική ροπή που δέχεται η σφαίρα είναι μηδέν έτσι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής είναι μηδέν.

$$\frac{\Delta K_{\text{περ}}}{\Delta t} = 0 \frac{J}{s} \quad \text{Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας είναι:}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta K_{\text{περ}}}{\Delta t} + \frac{\Delta K_{\text{μετ}}}{\Delta t} = 0 + \frac{W_{\Sigma F} \cdot \Delta x}{\Delta t} = \frac{-mg \cdot \Delta x}{\Delta t} = -mg \cdot u_1 = -1,4 \cdot 10 \cdot 4 = -56 \frac{J}{s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας είναι μηδέν διότι $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau = 0$